

ANNALES DES CONCOURS

MP
Physique et Chimie
2013

Sous la coordination de

Sébastien DESREUX

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Vincent FREULON

Professeur agrégé à l'ENS Ulm

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Ulm)

Mickaël PROFETA

Professeur en CPGE

Ancien élève de l'École Normale Supérieure (Cachan)

Par

Victor BERTRAND
ENS Lyon

Claire BESSON
Docteur en chimie

Olivier FRANTZ
Professeur agrégé en école d'ingénieur

Vincent FREULON
ENS Ulm

Alexandre HÉRAULT
Professeur en CPGE

Raphaël LASSERI
ENS Cachan

Benoît LOBRY
Professeur en CPGE

Jimmy ROUSSEL
Professeur en CPGE

Étienne THIBIERGE
ENS Lyon

Anna VENANCIO-MARQUES
ENS Lyon

Hadrien VROYLANDT
ENS Cachan

Les auteurs remercient Jean-Julien Fleck pour la précieuse aide qu'il a apportée à la préparation de cet ouvrage.

Des annales, pour quoi faire ?

Quand on prépare les concours, on ne peut rien laisser au hasard : il faut étudier chaque leçon, apprendre chaque exercice classique, en somme, travailler en détail tout ce qui peut tomber. Reste à savoir ce qui tombe vraiment !

Se confronter aux écrits de la dernière session est le meilleur moyen de préparer la suivante. Les *Annales des Concours* sont également un bon outil pour préparer les compositions pendant l'année. L'idée directrice de cet ouvrage s'inspire des manuels de Terminale mais nous avons ajouté, pour chaque sujet, des indications et de nombreux commentaires méthodologiques et scientifiques. Dans le même esprit, nous avons regroupé en fin d'ouvrage les formulaires les plus utiles.

Comment utiliser cet ouvrage ?

Les devoirs pendant l'année sont des entraînements précieux, mais ils sont généralement trop courts ou trop longs. Trop courts, parce que les compositions sur table en temps limité ne vous laissent guère le loisir de creuser les questions ; en s'interdisant de consacrer aux questions difficiles le temps qu'elles méritent, on se condamne à ne savoir résoudre que les questions faciles – celles qui rapportent peu de points. Trop longs, parce que les devoirs à la maison vous laissent seul face à un énoncé dont certaines questions sont susceptibles de vous bloquer complètement, ou de vous faire travailler pendant un temps déraisonnable. En prépa, le temps est compté.

Muni de cet ouvrage, vous pourrez rationaliser votre préparation. Commencez par parcourir l'énoncé, sans le lire de manière exhaustive ni tenter de le résoudre de tête : cherchez simplement à acquérir une idée générale de la destination du problème et des moyens qu'il se propose d'employer pour y parvenir. Travaillez de votre côté, en vous reportant au corrigé à la fin de chaque partie pour vérifier que vous êtes sur la bonne voie. Lorsque vous êtes confronté à une question qui semble insurmontable, consultez les indications puis réessayez. Si cela ne suffit pas, n'hésitez pas à lire en détail la solution de cette question, vérifiez que vous l'avez bien comprise et concentrez-vous sur la question suivante, sans l'aide du corrigé.

C'est dans cette perspective que nous avons écrit cet ouvrage, auquel nous avons apporté tout notre soin : au moins trois personnes ont travaillé sur chaque corrigé. Nous espérons qu'il vous aidera efficacement dans votre préparation.

Écrivez-nous !

Vos critiques, suggestions ou propositions nous aideront à améliorer encore nos ouvrages. Si vous souhaitez nous en faire part, n'hésitez pas à nous écrire :

`contact@H-K.fr`

Si vous détectez une erreur, nous vous serions reconnaissants de nous en faire part :

`Errare.humanum.est@H-K.fr`

Retrouvez-nous en ligne

Sur notre site www.H-K.fr, vous trouverez nos errata (les erreurs signalées et les correctifs), des compléments, et bien d'autres ouvrages. Nous attendons votre visite.

Bon courage, et bonne réussite !
Les auteurs

Cet ouvrage n'aurait pu exister sans l'aide d'Étienne Audebeau, Cédric Lépine, Stéphane Ravier, Laure Valentin et Gladys Vanhemelsdaele. Qu'ils en soient ici remerciés.

Sommaire thématique de Physique

2004 – 2013

X MP Physique	③	①	⑤	④		①	⑤		③
X MP Physique et SI	①		⑥	⑥		①	③		④
X PC Physique A	①	②	③	⑤	④	③	②		②
X PC Physique B	①	③	④	④	③	①	⑤	③	④
Mines MP Physique 1	③	②	②	⑦			④		③
Mines MP Physique 2	②		⑥	⑥		①	⑤		
Mines PC Physique 1	⑤	①	④	⑥	②	②	②	①	③
Mines PC Physique 2	②	①	①	⑤	⑤	②	①	③	⑤
Mines PSI Physique 1	①		④	⑥	③	③	⑤	③	②
Mines PSI Physique 2	②	①	③	②	⑦	②	②	①	①
Centrale MP Physique	②	②	⑤	⑧			⑦		⑤
Centrale MP Physique et Chimie	②	③	⑥	③			③	①	②
Centrale PC Physique 1	①	③	③	⑦	⑤	③	④	②	③
Centrale PC Physique 2	③	②	③	①	⑥	②	④	①	①
Centrale PSI Physique	③	①	⑤	④	⑥	②	③	①	④
Centrale PSI Physique et Chimie		④	①	①	①	②	④	③	①
CCP MP Physique 1	⑩	④		⑩					④
CCP MP Physique 2			⑥				⑦	②	⑩
CCP PC Physique 1	③	①	④	⑤	④	②	④		④
CCP PC Physique 2	①	④	⑧			②	④		⑨
CCP PSI Physique 1	①	①	⑥	③	⑦	③	①	②	④
CCP PSI Physique 2	②		⑥	④	③	③	④		①
E3A PSI Physique		①	④	①	②	②	②	③	①
E3A PSI Physique et Chimie	③	③	⑤		③	①	①		②
① : 1 fois depuis 2004 ② : 2 fois depuis 2004 ⋮ ⑨ : 9 fois depuis 2004 ① : 1 fois depuis 2004 dont 2013 ② : 2 fois depuis 2004 dont 2013 ⋮ ⑩ : 10 fois depuis 2004 dont 2013	Thermodynamique générale	Phénomènes diffusifs	Électrostatique, magnétostatique et électronique	Mécanique du point et du solide	Mécanique des fluides	Ondes mécaniques et sonores	Électromagnétisme dans le vide	Électromagnétisme dans les milieux	Optique

Sommaire

		Énoncé	Corrigé
CONCOURS COMMUNS POLYTECHNIQUES			
Physique 1	Étude mécanique d'une moto. Isolation thermique. <i>thermodynamique, mécanique du solide</i>	11	24
Physique 2	Étude simplifiée de l'œil et électromagnétisme. <i>optique géométrique et électromagnétisme</i>	53	65
Chimie	Étude de certains traitements des effluents urbains avant rejet. <i>oxydoréduction, conductimétrie, diagramme potentiel-pH, cinétique</i>	84	91
CENTRALE-SUPÉLEC			
Physique	Production d'étincelles électriques et exploration optique du plasma formé. <i>électrocinétique, mécanique du point, optique, théorie cinétique des gaz, électromagnétisme, ondes</i>	106	113
Physique et Chimie	Refroidissement de la matière aux échelles atomique et macroscopique. Le mélange eau-glycol. <i>électromagnétisme, mécanique, cinétique, thermodynamique, dosage d'oxydo-réduction</i>	135	142
MINES-PONTS			
Physique 1	Autour d'un dragster à réaction. <i>mécanique du point, électronique, thermodynamique des systèmes ouverts, électronique, optique ondulatoire</i>	164	170
Physique 2	À propos des diodes. <i>électrostatique, électronique</i>	185	193
Chimie	Le plomb. <i>cristallographie, diagrammes d'Ellingham, diagrammes E-pH, oxydoréduction, solutions aqueuses</i>	207	214

POLYTECHNIQUE

Physique	Quelques aspects de l'interaction coulombienne. <i>facteur de Boltzmann, équation de Poisson, théorème de Coulomb, identité thermodynamique</i>	224	231
Physique et Sciences de l'Ingénieur	Un transducteur électrodynamique : le haut-parleur. <i>induction, électricité, optique ondulatoire, mécanismes, asservissements</i>	249	261

FORMULAIRES

Constantes physiques	283
Constantes chimiques	280
Formulaire d'analyse vectorielle	284
Classification périodique	288

Sommaire thématique de Chimie

2004 – 2013

X PC Chimie		②	②	⑤	③	①	③	⑥	②	①	⑩
Mines MP Chimie	⑧	⑨	②	④	⑥	⑤		⑧		④	
Mines PC Chimie	⑥	⑤	④	⑦	⑥	①	①	⑥	②	②	⑩
Mines PSI Chimie	⑧	⑧	⑤	④	⑤	⑦	③	⑦		④	④
Centrale MP Physique et Chimie	④	③	④	③	⑥	①		⑧	②	①	
Centrale PC Chimie	③	①	⑤	⑥	③	③	①	⑦	⑤		⑩
Centrale PSI Physique et Chimie	①	⑤	②	④	④	⑤	③	⑤		③	②
CCP MP Chimie	⑥	③	⑥	③	⑧	②		⑧	①	①	
CCP PC Chimie 1	⑤	⑧	⑤	③	⑤	③	③	⑥	⑥	③	⑩
CCP PC Chimie 2	⑥	⑧	⑦	⑦	⑤	②	②	⑧	③	④	⑩
CCP PSI Physique 2	③	⑤	⑤		③	④	③	⑤		①	
E3A PSI Physique et Chimie	①	④	①	②	②		②	⑦		①	①
① : 1 fois depuis 2004 ② : 2 fois depuis 2004 ⋮ ⑨ : 9 fois depuis 2004 ① : 1 fois depuis 2004 dont 2013 ② : 2 fois depuis 2004 dont 2013 ⋮ ⑩ : 10 fois depuis 2004 dont 2013	Atomistique	Cristallographie	Solutions aqueuses	Cinétique chimique	Oxydoréduction	Diagrammes E-r-pH	Courbes intensité-potentiel	Thermochimie	Mélanges binaires	Diagrammes d'Ellingham	Chimie organique

CCP Physique 1 MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Victor Bertrand (ENS Lyon) ; il a été relu par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) et Jean-Julien Fleck (Professeur en CPGE).

Ce sujet se compose de deux grandes parties, l'une consacrée à la mécanique, l'autre à une étude thermodynamique.

La partie mécanique s'articule en deux temps. On commence par l'étude du mouvement d'une moto, en prenant en compte les différents éléments solides qui composent le système {conducteur+motocyclette}. Cette partie est longue et répétitive. Les calculs ne sont pas exagérément compliqués, mais il faut être concentré pour ne pas s'y perdre. En particulier, il faut bien se souvenir du fait que le théorème du moment cinétique peut s'appliquer en n'importe quel point fixe du référentiel barycentrique même si celui-ci n'est pas galiléen. Il est dommage qu'après tous ces calculs, aucune question intéressante ne soit posée sur les interprétations physiques, notamment comment on peut conserver l'équilibre sur une « roue avant » en moto ou à quelle condition (d'accélération ou de freinage) la moto se cabre (en arrière ou en avant). À noter que pour les applications numériques, le sujet fournit des roues de 50 cm de *rayon*, ce qui fait un mètre de *diamètre*. Sauf à parler de la moto de Batman dans *The Dark Knight Rises*, il est à parier que le concepteur ait confondu rayon et diamètre dans ses recherches de valeurs numériques...

La seconde étude concerne une particule qui évolue dans un fluide en rotation. Il s'agit de mécanique des fluides qui ne dit pas son nom (et pour cause : ce n'est pas au programme de MP!) et dont on a du mal à cerner l'intérêt pratique, si ce n'est faire écrire quelques équations du mouvement non usuelles. Les calculs ne sont pas compliqués en soi, mais justement, toute cette partie se cantonne à cela : du pur calcul sans interprétation physique sous-jacente.

La partie thermodynamique se consacre à l'étude de l'isolation d'une maison. En premier lieu, on étudie les flux radiatifs et diffusifs au niveau des fenêtres. Là encore, il fallait avoir bien compris le cours sur la radiation du corps noir car il s'agit de refaire la même chose 3 fois de suite en compliquant légèrement à chaque passage sans intérêt physique particulier (du moins pas exploité par le sujet) ; on finit par quelques considérations sur les résistances thermiques.

En second lieu, on s'intéresse au fonctionnement d'un climatiseur en vue de maintenir l'habitation fraîche en été. Cette partie est de loin la plus facile (car très proche du cours) et aura profité à ceux qui lisent l'énoncé en entier avant de se lancer dans le sujet. Elle contient néanmoins sur la fin une formulation du premier principe en écoulement stationnaire (à la limite du programme de MP) quelque peu discutable que l'on aura intérêt à oublier pour se cantonner à une démonstration plus classique du type détente de Joule-Thomson.

On l'aura compris, ce problème est long, très long et sans grand intérêt une fois que l'on a cerné les deux-trois compétences qu'il faut appliquer à répétition dans chaque partie. Il est plutôt bon de s'y entraîner dans l'optique d'une « analyse d'énoncé », c'est-à-dire déterminer à la simple lecture les parties qu'il faut traiter en priorité (car faciles ou proches du cours) ainsi que celles sur lesquelles il faut éviter de passer trop de temps (du fait d'une erreur de calcul qui, par cascade, pourrait invalider les pages de calculs suivantes).

INDICATIONS

Partie 1

- 1.1 Bien définir les référentiels considérés (sol, bâti de la moto, roues). Utiliser la composition des vitesses afin d'exprimer la vitesse de glissement des roues par rapport au sol.
- 1.2 Exprimer le moment cinétique d'une roue par rapport à son centre dans le référentiel du système {moto+conducteur}. Utiliser le théorème de Kœnig pour l'exprimer dans le référentiel fixe ($Oxyz$). Supposer que O_1 (resp. O_2) est le barycentre de la roue avant (resp. arrière).
- 1.3 Raisonner comme au 1.2, mais sur le système complet. Remarquer que seules les roues sont animées d'une vitesse dans le référentiel du système {moto+conducteur}.
- 1.5 Appliquer le théorème du moment cinétique dans le référentiel barycentrique.
- 1.8 Les roues ne décollent pas tant qu'il y a contact, donc tant que les réactions du sol sont strictement positives.
- 1.9 La condition de non-glissement s'exprime à partir des composantes de la réaction: $f |N_i| \geq |T_i|$ pour $i \in \{1, 2\}$, avec f coefficient de frottement.
- 1.10 On suppose que O_2 est le barycentre de la roue arrière. Γ est à prendre en compte dans la somme des moments appliqués en O_2 .
- 1.11 La puissance fournie par un moteur exerçant un couple Γ sur un axe tournant à la vitesse angulaire ω s'écrit $\mathcal{P} = \Gamma\omega$.
- 1.12 Appliquer le même raisonnement qu'en 1.3.
- 1.13 Le nouveau point de contact, donc d'application de $\vec{\mathfrak{A}}_2$ est C_2 . Prendre garde à la projection du vecteur \vec{GC}_2 dans (\vec{e}_x, \vec{e}_y) .
- 1.14 Appliquer le théorème du moment cinétique au point G. On ne demande pas l'expression littérale de θ .
- 1.15 Justifier que seule l'équation ① est modifiée. Utiliser le résultat du théorème du moment cinétique appliqué dans la question 1.10 pour trouver T_2 .
- 1.18 Utiliser le changement de variable proposé pour trouver une équation différentielle sur u . Penser à vérifier sur le résultat que $v(t) \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} v_\ell$.

Partie 2

- 2.1 Appliquer le principe fondamental de la dynamique au point P.
- 2.2.1 Introduire $\theta = (\vec{e}_x, \vec{Op})$. La vitesse angulaire de parcours dans le référentiel mobile est alors $\dot{\theta}$.
- 2.3 Le point coïncident à P, immobile dans \mathfrak{R}' , décrit un mouvement circulaire uniforme à la vitesse ω autour de l'axe (Oz) dans \mathfrak{R} .
- 2.4 Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour un référentiel non galiléen. Il n'est pas demandé de calculer $z(t)$.

Partie 3

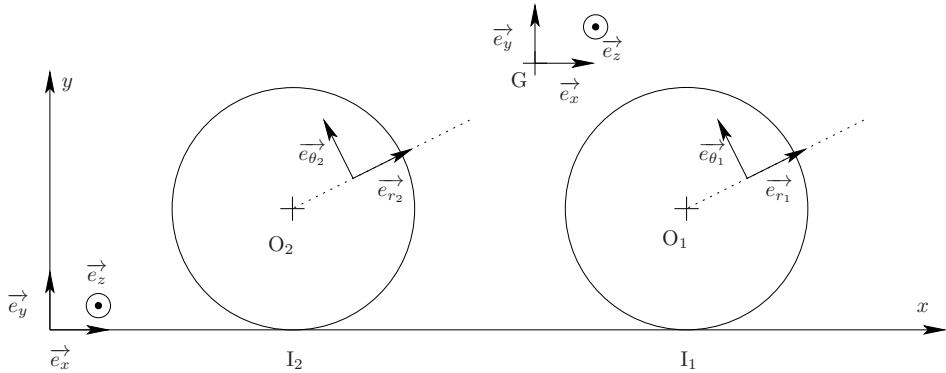
- 3.2.1 Détailler les différents flux émis et absorbés. Le flux solaire n'est absorbé que par le corps noir, car la vitre lui est transparente.
- 3.2.3 Procéder à un bilan énergétique sur le corps noir. S'il reçoit un flux Φ pendant dt , il gagne une énergie Φdt . Si sa température évolue de dT , son énergie évolue de CdT . Le bilan radiatif sur la vitre est inchangé.
- 3.4.1 Dénombrer les particules impactant une paroi pendant un intervalle de temps dt en utilisant l'isotropie de la distribution des vitesses. Calculer leur variation de quantité de mouvement pour en déduire la force de pression exercée par la paroi.
- 3.4.4 Supposer que λ varie peu avec la température sur l'évolution considérée. Partir d'un modèle unidimensionnel, en régime permanent, pour démontrer l'expression de la résistance thermique.
- 3.4.7 Le flux total est la somme algébrique des flux diffusifs et des flux radiatifs émis par les vitres.

Partie 4

- 4.1.1 L'énergie interne est une fonction d'état : sa variation est nulle sur un cycle.
- 4.1.2 Une machine de Carnot est une machine dont tous les processus sont réversibles. L'entropie créée est donc nulle.
- 4.1.3 Le C.O.P. est défini par : $\eta = \frac{\text{énergie utile à l'utilisateur}}{\text{énergie dépensée par l'utilisateur}}$.
- 4.1.4 Utiliser la première loi de Joule pour associer température constante et énergie du gaz constante. Le gaz reçoit l'énergie provenant du flux total sur les murs, et en donne au fluide du climatiseur en tant que source froide par transfert thermique.
- 4.2.1 La masse d'air de la maison doit être constante. La pression ne change pas pour l'air entrant, et celui-ci est toujours pris à la même température T_{air} .
- 4.2.2 L'énoncé n'est pas clair. Il vaut mieux considérer le système composé du fluide dans le climatiseur à l'instant t auquel on ajoute un élément d'air entrant, et étudier comment varie l'enthalpie de ce système entre t et $t + dt$. $\delta Q_{\text{air,e}}$ est le transfert de chaleur infinitésimal reçu par l'air pendant cet intervalle de temps, il dépend donc aussi de dt .
- 4.2.5 La pression partielle de la vapeur d'eau $p_{\text{vap,eau}}$ est le produit de la pression totale p et du titre en vapeur d'eau $x_{\text{vap,eau}}$. À la pression de vapeur saturante, il y a équilibre entre eau liquide et vapeur d'eau.

1. UNE MOTO ET SON CONDUCTEUR

1.1 Pour simplifier l'écriture, notons R_0 le référentiel fixe ($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), R_G le référentiel de la moto ($G, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$), R_1 le référentiel de la roue avant ($O_1, \vec{e}_{r_1}, \vec{e}_{\theta_1}, \vec{e}_z$) et R_2 le référentiel de la roue arrière ($O_2, \vec{e}_{r_2}, \vec{e}_{\theta_2}, \vec{e}_z$), où les vecteurs introduits sont définis sur le schéma ci-dessous.



Écrivons maintenant les relations de non-glissement des roues avant et arrière. Exprimons la vitesse de glissement en utilisant la composition des vitesses :

$$\vec{v}_g = \vec{v}(I_1 \in R_1)_{R_0} = \vec{v}(I_1 \in R_1)_{R_G} + \vec{v}(I_1 \in R_G)_{R_0}$$

- Le premier terme représente la vitesse du point I_1 dans le référentiel de la roue R_1 par rapport au bâti de la moto (référentiel R_G). I_1 est en rotation uniforme à la vitesse instantanée de rotation ω_1 autour de O_1 , avec $O_1I_1 = r_1$. Donc

$$\vec{v}(I_1 \in R_1)_{R_G} = r_1 \omega_1 \vec{e}_{\theta_1}$$

Au point I_1 , $\vec{e}_{\theta_1} = \vec{e}_x$, soit

$$\vec{v}(I_1 \in R_1)_{R_G} = r_1 \omega_1 \vec{e}_x$$

- Le deuxième terme représente la vitesse du point coïncident à I_1 dans R_G par rapport à R_0 . R_G étant en translation par rapport à R_0 à la vitesse instantanée $v\vec{e}_x$,

$$\vec{v}(I_1 \in R_G)_{R_0} = v \vec{e}_x$$

En l'absence de glissement, $\vec{v}_g = \vec{0}$

d'où

$$\boxed{r_1 \omega_1 + v = 0}$$

Pour la roue arrière, on obtient de même

$$\boxed{r_2 \omega_2 + v = 0}$$

On en déduit

$$\boxed{\omega_1 = -\frac{v}{r_1} \quad \text{et} \quad \omega_2 = -\frac{v}{r_2}}$$

CCP Physique 2 MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Raphaël-David Lasserri (ENS Cachan) ; il a été relu par Étienne Thibierge (Doctorant-ENS Lyon) et par Julien Dumont (Professeur en CPGE).

Ce sujet porte sur l'œil humain puis sur la propagation d'ondes électromagnétiques. Ses cinq parties sont indépendantes.

- Dans une première partie proche du cours d'optique géométrique de sup, on modélise l'œil humain par une lentille. Celle-ci est choisie plan-convexe pour modéliser la vue de loin et on s'intéresse alors au rôle de la pupille (rayons paraxiaux ou non). Pour modéliser la vue de près, on choisit une lentille biconvexe et on s'intéresse à la presbytie.
- La deuxième partie poursuit sur le thème de la vision avec une méthode de mesure du rayon de courbure d'une lentille utilisable par un opticien. L'étude repose sur le dispositif des anneaux de Newton pour obtenir une figure d'interférences.
- La troisième partie, proche du cours mais nécessitant quelques calculs, concerne la réflexion d'une onde électromagnétique sur un conducteur parfait.
- La quatrième partie s'intéresse à la propagation du courant dans un conducteur non parfait.
- La cinquième partie aborde la supraconductivité et l'effet Meissner, un thème récurrent aux concours.

Ce problème permet de faire le point sur l'optique géométrique (sup) et sur l'électromagnétisme (spé).

INDICATIONS

Partie I

I.5.a Développer $\cos(a - b)$ et $\sin(a - b)$ grâce aux identités trigonométriques.

Partie II

II.1.a Utiliser le théorème de Pythagore.

II.2.c Ne pas oublier le grandissement dans le calcul.

Partie III

III.1.b Penser à l'équation de d'Alembert.

III.1.d Pour simplifier le calcul, passer en représentation complexe.

III.1.c Attention au signe devant \vec{k} .

III.1.f Le vecteur de Poynting a pour expression

$$\vec{R} = \frac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0}$$

Utiliser le fait que $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$ et $\langle \cos(\omega t) \sin(\omega t) \rangle = 0$.

Partie IV

IV.4.a Projeter l'expression sur \vec{e}_y .

IV.5 Utiliser l'expression de la puissance volumique $\vec{J} \cdot \vec{E}$, puis intégrer sur la totalité du conducteur.

Partie V

V.1.b Il s'agit d'une simple application numérique ; l'énoncé ne demande pas de démontrer l'unité, qu'il faudra toutefois préciser.

V.5 Utiliser l'expression de la force de Laplace surfacique.

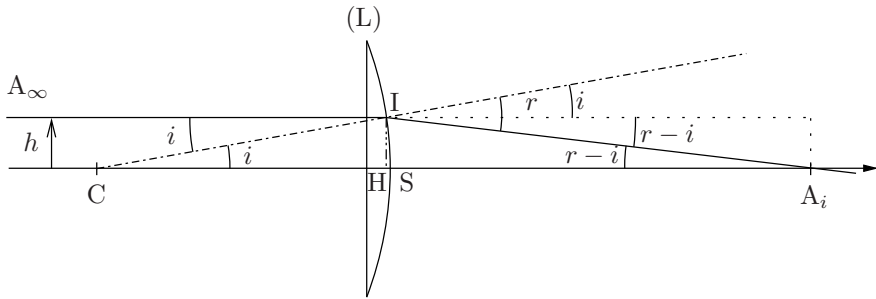
I. ÉTUDE SIMPLIFIÉE DE L'ŒIL HUMAIN

I.A Modèle simplifié de l'œil pour la vision de loin

I.1 La relation de Snell-Descartes à l'interface entre l'air d'indice $n_{\text{air}}=1$ et un milieu d'indice n est

$$\sin r = n \sin i$$

I.2 Reprenons le schéma de l'énoncé pour préciser des angles :



Vu l'orientation de l'axe (CS) donnée par l'énoncé, le triangle CHI fournit, puisque $CI = R_C$,

$$\overline{CH} = R_C \cos i$$

et

$$IH = R_C \sin i$$

Avec le triangle IHA_i,

$$\overline{HA_i} \tan(r - i) = IH$$

donc

$$\overline{HA_i} = R_C \frac{\sin i}{\tan(r - i)}$$

I.3 D'après les égalités précédentes et la relation de Chasles,

$$\overline{CA_i} = \overline{CH} + \overline{HA_i} = R_C \left[\cos i + \frac{\sin i}{\tan(r - i)} \right]$$

I.4.a Pour des rayons paraxiaux, les angles i , r et $r - i$ sont petits, si bien que $\sin i \simeq i$, $\sin r \simeq r$ et $\tan(r - i) \simeq r - i$ à l'ordre 1. Le résultat de la question I.2 se simplifie en

$$\overline{HA_i} = R_C \frac{i}{r - i} = R_C \frac{i}{ni - i} \quad (\text{Snell-Descartes})$$

$$\overline{HA_i} = \frac{R_C}{n - 1}$$

La position du point A_i ne dépend donc ni de i , ni de h .

Ce résultat ne doit pas surprendre : tous les rayons arrivant sur une lentille convergente parallèlement à son axe de symétrie sont réorientés par la lentille vers son foyer principal image, qui ne dépend que de sa géométrie et de l'indice du matériau qui la compose.

On pouvait également montrer que $\overline{CA_i} = n R_C / (n - 1)$, ce qui autorise la même conclusion et établit directement le lien entre $\overline{CA_i}$ et $\overline{HA_i}$.

I.4.b Avec les simplifications proposées,

$$f_i = \overline{SF_i} = \underbrace{\overline{SH}}_0 + \overline{HF_i} = \overline{HA_i}$$

$$\boxed{f_i = \frac{R_C}{n - 1}} \quad (\text{d'après la question précédente})$$

I.4.c La vergence étant par définition l'inverse de la distance focale,

$$\boxed{f_i = \frac{1}{V} = 1,7 \text{ cm}}$$

et en utilisant la question précédente,

$$\boxed{R_C = \frac{n - 1}{V} = 5,5 \text{ mm}}$$

La vergence étant donnée avec deux chiffres significatifs seulement par l'énoncé, on ne peut pas donner plus de chiffres après la virgule. En revanche, on pouvait tout à fait exprimer ces résultats en mètres avec la notation scientifique : $1,7 \cdot 10^{-2} \text{ m}$.

I.5.a D'après la question I.3,

$$\begin{aligned} \overline{CA_i} &= R_C \left[\cos i + \sin i \frac{\cos(r - i)}{\sin(r - i)} \right] \\ &= R_C \left[\cos i + \sin i \frac{\cos r \cos i + \sin r \sin i}{\sin r \cos i - \sin i \cos r} \right] \\ &= R_C \frac{\sin r \cos^2 i - \sin i \cos i \cos r + \sin i \cos i \cos r + \sin r \sin^2 i}{\sin r \cos i - \sin i \cos r} \\ &= R_C \frac{\sin r}{\sin r \cos i - \sin i \cos r} \quad (\cos^2 i + \sin^2 i = 1) \\ &= R_C \frac{n \sin i}{n \sin i \cos i - \sin i \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}} \quad (\text{Snell-Descartes}) \end{aligned}$$

$$\boxed{\overline{CA_i} = \frac{n R_C}{n \cos i - \sqrt{1 - n^2 \sin^2 i}}} \quad (\text{en simplifiant par } \sin i)$$

CCP Chimie MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Claire Besson (Docteur en chimie) ; il a été relu par Kim Larmier (ENS Ulm) et Christelle Serba (ENS Lyon).

Ce sujet présente de manière simplifiée quelques-uns des problèmes relatifs au traitement des eaux usées, en s'intéressant à l'exemple d'un polluant organique, le *méta*-crésol, puis d'un polluant inorganique, l'aluminium. Le problème est de longueur raisonnable pour une épreuve de deux heures.

- La première partie s'intéresse à la dégradation d'un polluant organique modèle, le *méta*-crésol, par le dioxygène de l'air. Elle fait essentiellement appel à des notions d'oxydoréduction de base (écriture de demi-équations rédox, application de la loi de Nernst, force électromotrice), à l'exception des questions 3.b et 3.c où l'on utilise des notions de thermochimie (affinité chimique et constante d'équilibre).
- La deuxième partie traite de la cinétique de réactions d'oxydation du type de celle étudiée dans la première partie en présence de dioxyde de titane employé comme photocatalyseur. Aucun aspect mécanistique n'est abordé, et l'exercice se résume à l'intégration d'une loi de vitesse donnée par l'énoncé et à des comparaisons à des données expérimentales.
- La troisième partie se subdivise en deux sections. Les cinq premières questions conduisent à la construction complète du diagramme potentiel-pH de l'aluminium. Les suivantes se penchent sur le suivi conductimétrique du dosage des ions Al^{3+} par la soude, avec tout d'abord quelques questions de cours sur la conductimétrie, puis l'étude du dosage à proprement parler avant de finir par un calcul de conductivité.

De manière typique pour un sujet des CCP, il fait appel à de nombreuses parties des cours de première et de deuxième année, avec toutefois une insistance particulière sur l'oxydoréduction.

Une difficulté particulière présentée par ce sujet est sa grande linéarité. Les trois parties forment chacune un bloc où aucune question ne peut être sautée (à l'exception des questions 6.a.2 et 6.b.1). En contrepartie, le raisonnement est fortement guidé par l'énoncé.

INDICATIONS

Partie A

- 1.a Il ne faut pas se laisser impressionner par les coefficients stœchiométriques plus élevés que d'habitude.
- 3.a Les deux demi-équations ont été obtenues aux questions 1.a et 2.a.

Partie B

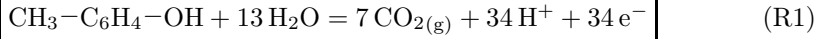
- 5.a On peut intégrer par séparation des variables C et t .
- 5.b La valeur de K_a est donnée par l'énoncé, ce qui rend la linéarisation aisée.
- 5.d.2 Comment évolue C en fonction du temps ?

Partie C

- 6.b.1 Si l'on souhaite utiliser les demi-réactions obtenues à la question 6.a.2, il faut utiliser le potentiel standard apparent et non le potentiel standard. Le principe reste toutefois rigoureusement le même. On peut aussi réécrire les demi-réactions en milieu acide et se ramener à une approche plus classique du problème.
- 7.b La grandeur mesurée est généralement notée G .
- 8.a.1 La première réaction fait intervenir l'acide nitrique ajouté dans la solution.
- 8.a.3 On demande ici la teneur en aluminium dans le litre d'effluent initialement prélevé, et non dans les dix millilitres obtenus par concentration du prélèvement initial et qui font effectivement l'objet du dosage.
- 8.b.2 Il y a deux sources d'ions nitrate.

A. DÉGRADATION DU *m*-CRÉSOLO PAR LE DIOXYGÈNE (O₂) ATMOSPHÉRIQUE

1.a Le *mé*ta-crésol est oxydé en dioxyde de carbone selon



1.b Le potentiel d'équilibre d'un système constitué du couple Ox/Red est donné par la loi de Nernst :

$$E_{I=0} = E_{\text{Ox/Red}}^\circ + \frac{RT}{n\mathcal{F}} \ln \left(\frac{a_{\text{Ox}}}{a_{\text{Red}}} \right)$$

avec $E_{\text{Ox/Red}}^\circ$ le potentiel standard du couple Ox/Red, n le nombre d'électrons échangés et a_i l'activité à l'équilibre du composé i .

1.c Il est demandé dans l'énoncé d'assimiler activité et concentration pour les espèces dissoutes. Par ailleurs, les gaz sont considérés comme parfaits et leur activité est donc égale à leur pression partielle exprimée en bars. La loi de Nernst appliquée au couple CO₂/*m*-crésol décrit par la réaction R1 donne donc

$$E_{I=0 \ 1} = E_{\text{CO}_2/\textit{m}\text{-crésol}}^\circ + \frac{RT}{34\mathcal{F}} \ln \left(\frac{P_{\text{CO}_2}^7 [\text{H}^+]^{34}}{[\textit{m}\text{-crésol}]} \right)$$

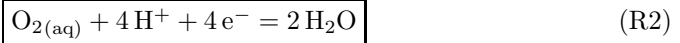
Comme par ailleurs $\text{pH} = -\log a_{\text{H}^+} = -\log [\text{H}^+]$, c'est-à-dire $[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}}$, on obtient

$$E_{I=0 \ 1} = E_{\text{CO}_2/\textit{m}\text{-crésol}}^\circ + \frac{RT}{34\mathcal{F}} \ln \left(\frac{P_{\text{CO}_2}^7 \times 10^{-34\text{pH}}}{[\textit{m}\text{-crésol}]} \right)$$

et

$$E_{I=0 \ 1} = 0,312 + \frac{8,31 \times 298}{34 \times 9,65 \cdot 10^4} \ln \left[\frac{(3,16 \cdot 10^{-2})^7 \times 10^{-34 \times 6,5}}{5 \cdot 10^{-3}} \right] = -0,086 \text{ V}$$

2.a La demi-équation de réduction du dioxygène dissous en eau est



2.b En appliquant la loi de Nernst de manière analogue à la question 1.c, on obtient pour le couple O₂/H₂O

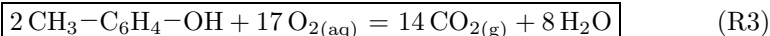
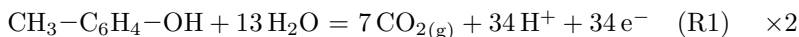
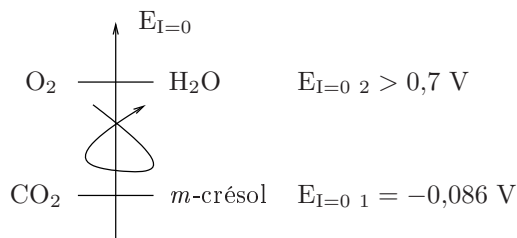
$$E_{I=0 \ 2} = E_{\text{O}_2(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}}^\circ + \frac{RT}{4\mathcal{F}} \ln (C_{\text{O}_2} [\text{H}^+]^4)$$

$$E_{I=0 \ 2} = E_{\text{O}_2(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}}^\circ + \frac{RT}{4\mathcal{F}} \ln (C_{\text{O}_2} \times 10^{-4\text{pH}})$$

ce qui donne, avec $E_{\text{O}_2(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}}^\circ = 1,243 \text{ V}$ et $\text{pH} = 6,5$ et en fonction de la concentration en dioxygène dissous

indice i	C _{O₂} i (mol.L ⁻¹)	E _{I=0 2<i>i</i>} (V)
<i>a</i>	1.10 ⁻⁶	0,770
<i>b</i>	239.10 ⁻⁶	0,805
<i>c</i>	1140.10 ⁻⁶	0,815

3.a Quelle que soit la concentration en dioxygène considérée ici, $E_{I=0\ 1} < E_{I=0\ 2}$. La réaction évolue donc spontanément dans le sens de l'oxydation du *méta*-crésol.

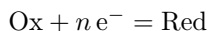


3.b L'affinité chimique standard de la réaction R3 est

$$A_3^\circ = -\Delta_r G_3^\circ = -(2 \Delta_r G_1^\circ + 17 \Delta_r G_2^\circ)$$

D'après les deux premiers principes de la thermodynamique, l'enthalpie libre de réaction est une fonction d'état, qui ne dépend par conséquent que de l'état final et de l'état initial du système. C'est pour cela que l'on peut obtenir $\Delta_r G_3^\circ$ à partir de $\Delta_r G_1^\circ$ et $\Delta_r G_2^\circ$.

Par ailleurs, pour toute demi-équation rédox du type



on a
$$\Delta_r G^\circ = -n \mathcal{F} E_{\text{Ox/Red}}^\circ$$

et donc
$$\Delta_r G_1^\circ = 34 \mathcal{F} E_{\text{CO}_2/m\text{-crésol}}^\circ \quad \text{et} \quad \Delta_r G_2^\circ = -4 \mathcal{F} E_{\text{O}_2(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}}^\circ$$

Ainsi,

$$\boxed{A_3^\circ = 68 \mathcal{F} (E_{\text{O}_2(\text{aq})/\text{H}_2\text{O}}^\circ - E_{\text{CO}_2/m\text{-crésol}}^\circ)}$$

soit

$$\boxed{A_3^\circ = 68 \times 9,65 \cdot 10^4 \times (1,243 - 0,312) = 6,11 \cdot 10^6 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1}}$$

3.c La constante d'équilibre de la réaction est par définition

$$\begin{aligned} K_{(\text{R3})}^\circ &= \exp\left(-\frac{\Delta_r G_3^\circ}{R T}\right) = \exp\left(\frac{A_3^\circ}{R T}\right) \\ &= \exp\left(\frac{6,11 \cdot 10^6}{8,31 \times 298}\right) \simeq 10^{1072} \end{aligned}$$

On obtient $K_{(\text{R3})}^\circ \gg 1$: l'oxydation du *méta*-crésol est donc quantitative.

L'obtention d'une constante d'équilibre très élevée pour ce qui n'est en fin de compte qu'une simple réaction de combustion n'est pas une surprise. En l'absence d'action extérieure, cependant, le *méta*-crésol est stable à l'air à température ambiante : la cinétique de la réaction est trop lente pour une décomposition efficace et un catalyseur doit être employé. Dans la deuxième partie de ce problème, c'est le dioxyde de titane qui joue ce rôle.

Centrale Physique MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Étienne Thibierge (ENS Lyon) ; il a été relu par Raphaël Lasserri (ENS Cachan) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Ce problème traite des étincelles naissant entre deux électrodes fortement polarisées. Il se compose de quatre parties complètement indépendantes. On y aborde des aspects relatifs à la production des étincelles, à leur modélisation et à leur étude expérimentale.

- On s'intéresse dans la partie I à un dispositif historique servant à produire des hautes tensions, la bobine de Ruhmkorff, qui est constituée de deux enroulements en inductance totale. On commence par une étude électrocinétique des deux enroulements, en régime transitoire puis en régime sinusoïdal forcé. Enfin, on étudie le couplage inductif entre les deux enroulements, ce qui permet de calculer des ordres de grandeur des tensions produites.
- La partie II traite de la modélisation du déclenchement de l'étincelle d'un point de vue microscopique. Après avoir rappelé des ordres de grandeur relatifs aux propriétés microscopiques des gaz, on obtient, dans le cadre de la théorie cinétique, des expressions et des ordres de grandeur du champ électrique et de la tension nécessaires à la formation de l'étincelle.
- Le plasma formé par l'étincelle est ensuite étudié expérimentalement dans la partie III, à partir de résultats publiés dans un article de recherche. Différentes parties du dispositif expérimental sont analysées, notamment le contrôle optique d'un faisceau laser dans un modèle géométrique, et la chaîne de détection électronique de la déviation du faisceau laser.
- Enfin, on cherche dans la partie IV à interpréter les résultats expérimentaux précédents par un modèle électromagnétique du plasma. On étudie en particulier la propagation dispersive d'une onde électromagnétique dans un tel milieu.

Ce problème cohérent et intéressant propose un parcours assez varié autour du phénomène d'arc électrique. Les questions posées sont généralement de difficulté modérée, et abordent un large spectre de notions communes aux programmes de toutes les filières de CPGE. Il intéressera donc aussi bien les étudiants de MP que de PC ou PSI. On y trouve en effet de l'électrocinétique, de la mécanique du point, un zeste d'optique géométrique et ondulatoire, de la théorie cinétique des gaz, de l'électromagnétisme, et de la physique des ondes. Par ailleurs de nombreuses questions demandent une analyse physique rigoureuse plus que des compétences calculatoires poussées.

INDICATIONS

Partie I

- I.B.1. Découper le cylindre en tranches d'épaisseur d , et considérer que chaque tranche est une superposition de spires circulaires d'épaisseur d .
- I.B.2. Des arguments physiques sont nécessaires, en plus de l'approche dimensionnelle.
- I.C.1. On peut partir de la définition de L_1 , L_2 et M en termes de flux et utiliser la loi de Faraday.
- I.C.2. La constante de temps τ_1 est celle obtenue à la question I.A.1.

Partie II

- II.A.1.a. Supposer le gaz parfait.
- II.A.2. On peut remarquer que si le gaz de même densité N^* était figé sur un réseau cubique, alors le pas du réseau serait la distance d_m entre molécules voisines.
- II.B.2.b. L'énoncé n'est pas très clair sur la définition de τ_c . Il s'agit du temps typique entre une collision quelconque et une collision ionisante dans le cas où l'effet d'avalanche se produit. Les collisions dues à l'agitation thermique n'interviennent pas ici.
- II.B.2.c. Le paramètre important pour que l'effet d'avalanche ait lieu est la fraction de collisions ionisantes parmi le nombre total de collisions. Il est intéressant de calculer le rapport de deux longueurs, l'une caractérisant les collisions ionisantes et l'autre l'ensemble des collisions.

Partie III

- III.A.3. Noter que
$$\frac{n_0 - n_p}{n_p} \simeq \frac{n_0 - n_p}{n_0}$$
- III.B.3. Le calcul de l'angle de divergence en sortie fait appel à des notions de physique des lasers hors programme.
- III.C.1. Noter que la puissance reçue est proportionnelle à la surface éclairée. On peut assimiler la variation de surface éclairée à un rectangle.

Partie IV

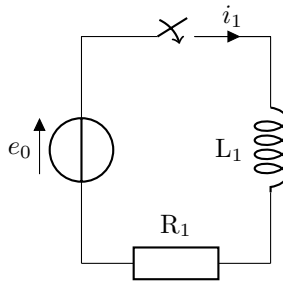
- IV.A.3. Utiliser la représentation complexe.
- IV.B.2. Procéder comme pour obtenir l'équation d'onde dans le vide, en utilisant la relation constitutive du plasma pour remplacer le terme $\frac{\partial \vec{j}}{\partial t}$.
- IV.B.3. Il est judicieux de commencer par calculer $1/v_\varphi^2$.
- IV.B.5. La définition de l'indice optique fait intervenir la vitesse de phase, pas la vitesse de groupe.

PRODUCTION D'ÉTINCELLES ÉLECTRIQUES ET EXPLORATION OPTIQUE DU PLASMA FORMÉ

I. LA BOBINE DE RUHMKORFF : UNE PROUESSE TECHNOLOGIQUE DU XIX^e SIÈCLE

I.A Établissement du courant dans un circuit inductif primaire

I.A.1 Le circuit inductif primaire est équivalent à une résistance R_1 , une bobine idéale d'inductance L_1 , un interrupteur et une source idéale de tension continue e_0 mis en série.



Une fois le régime transitoire terminé, la bobine idéale se comporte comme un fil sans résistance. D'après la loi d'Ohm,

$$i_{1\infty} = \frac{e_0}{R_1}$$

Établissons l'équation différentielle vérifiée par i_1 pour $t \geq 0$, une fois l'interrupteur fermé. Par application de la loi des mailles,

$$R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} = e_0$$

soit

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{R_1}{L_1} i_1 = \frac{e_0}{L_1}$$

On introduit le temps caractéristique

$$\tau_1 = \frac{L_1}{R_1}$$

La solution de l'équation différentielle est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière de l'équation complète, que l'on prend comme étant $i_{1\infty}$ déterminée précédemment. Ainsi,

$$i_1(t) = i_{1\infty} + I_1 e^{-t/\tau_1}$$

où I_1 est une constante qui s'obtient à partir des conditions initiales.

L'équation différentielle est d'ordre 1, il n'y a donc qu'une constante à déterminer et une seule condition initiale suffit.

On considère en l'occurrence la continuité du courant imposée par la bobine dans sa branche, $i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = 0$. Ainsi,

$$I_1 = -i_{1\infty}$$

d'où

$$i_1(t) = i_{1\infty} (1 - e^{-t/\tau_1})$$

I.A.2 Application numérique : $\tau_1 = 9,12 \cdot 10^{-4} \text{ s}$

I.B. Enroulement secondaire

I.B.1 Une tranche de cylindre de largeur d est entourée de $N = (r'_2 - r_2)/d$ spires de rayon $r_2 + nd$, ce motif étant répété $M = h/d$ fois pour recouvrir tout le cylindre. La longueur de fil nécessaire pour entourer une tranche de cylindre est

$$\ell_{\text{tranche}} = \sum_{n=0}^{N-1} 2\pi (r_2 + nd) = 2\pi \left(N r_2 + \frac{N(N-1)}{2} d \right)$$

On fait ici une approximation, puisque le rayon de la spire n est en fait $r_2 + nd + d/2$. Néanmoins le terme omis contribuerait à ℓ_{tranche} par un terme Nd , négligeable devant le terme dominant $N^2 d$.

Par conséquent, la longueur totale requise est

$$\ell = M \ell_{\text{tranche}} = 2\pi \frac{h}{d} \left(\frac{r'_2 - r_2}{d} r_2 + \frac{(r'_2 - r_2)(r'_2 - r_2 - d)}{2d^2} d \right)$$

En négligeant d devant r_2 , on obtient finalement

$$\ell = \pi \frac{h}{d^2} (r'_2{}^2 - r_2{}^2)$$

ce qui est la forme demandée par l'énoncé, avec

$$\alpha = \pi$$

I.B.2 Raisonnons dimensionnellement, en écrivant

$$R_2 = \ell^a \times \gamma^b \times S^c$$

avec a , b et c à déterminer, et en notant $S = \pi d^2/4$ la section du fil. En termes d'unités,

$$[\Omega] = [m]^a \times [\Omega]^{-b} \cdot [m]^{-b} \times [m]^{2c}$$

ce qui conduit au système

$$\begin{cases} 1 = -b \\ 0 = a - b + 2c \end{cases}$$

Ce système ne compte que deux équations pour trois inconnues, car il n'y a que deux dimensions mises en jeu pour trois paramètres physiques différents. L'approche dimensionnelle suggérée par l'énoncé ne peut donc suffire pour déterminer complètement le résultat.

Centrale Physique et Chimie MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Jimmy Roussel (Professeur en CPGE) et Anna Venancio-Marques (ENS Lyon) ; il a été relu par Bruno Salque (ENS Lyon), Claire Besson (Docteur en chimie), Emmanuel Bourgeois (Professeur en CPGE) et Laure-Lise Chapellet (ENS Lyon).

Ce sujet aborde le refroidissement de la matière aux échelles atomique et macroscopique. Il est composé de deux parties parfaitement indépendantes.

- La première aborde le contrôle du mouvement des atomes à l'aide de la lumière. Il s'agit de montrer comment un ensemble de faisceaux laser correctement disposés peut entraîner sur un jet atomique un puissant et rapide ralentissement dit **refroidissement Doppler**. Le modèle utilisé s'inscrit dans le cadre classique de l'électron élastiquement lié. Dans un premier temps, on montre qu'un atome peut être modélisé par un oscillateur amorti. Ensuite, on s'intéresse à l'interaction entre cet atome et une onde électromagnétique monochromatique plane. L'onde donne naissance à une force de pression de radiation dont l'intensité dépend du désaccord entre la fréquence de l'onde et la fréquence propre de l'atome. Enfin, cette force radiative associée à l'effet Doppler permet d'envisager un dispositif dont l'effet est l'apparition d'une force de frottement extrêmement puissante qui permet de refroidir un gaz d'atome à l'échelle de la centaine de μK .
- La seconde partie, consacrée à la chimie, est l'étude d'un mélange eau-glycol, qui peut dans certains cas servir d'antigel. Une première sous-partie s'intéresse à la synthèse industrielle du glycol, en se basant sur une étude cinétique de deux réactions concurrentes. Il s'agit essentiellement d'exploiter des courbes donnant l'évolution de concentrations au cours du temps afin d'établir les meilleures conditions pour la synthèse industrielle. La seconde sous-partie cherche à déterminer la composition du mélange eau-glycol pour aboutir à un antigel à une température de 27°C . Une approche thermodynamique permet d'aboutir à une première composition du mélange, puis un dosage indirect par oxydoréduction permet de caractériser la composition en glycol d'un antigel commercial. Les deux valeurs sont alors comparées.

La partie physique porte sur un sujet de recherche actuel, ce qui le rend intéressant mais suppose une bonne maîtrise du cours d'électromagnétisme et de mécanique. Heureusement, l'énoncé est très directif tout au long de cette partie. Concernant la partie chimie, l'étude cinétique est originale, reposant sur la lecture de courbes expérimentales, et ne présente pas de difficulté particulière. L'approche thermodynamique est bien guidée et aborde des thèmes fréquemment étudiés. La méthode de dosage indirect est classique, nécessitant toutefois une lecture attentive de l'énoncé et un soin particulier dans l'établissement des réactions de dosage.

INDICATIONS

Première partie

I.C.2.a La dimension d'un champ magnétique se retrouve avec le théorème d'Am-père.

I.C.4 La puissance électromagnétique qui traverse une surface \mathcal{S} est le flux sortant du vecteur de Poynting à travers cette surface.

I.D.1 Une erreur s'est glissée dans l'énoncé ; il faut lire $\langle \ddot{x}^2 \rangle = -\langle \ddot{x} \dot{x} \rangle$.

I.D.3.a Remarquer que $\omega_0^2 - \omega^2 \simeq -2 \delta\omega \omega_0$ au premier ordre en $\delta\omega$.

II.A.1 Montrer que l'on peut négliger la force magnétique devant la force électrique ainsi que le terme de propagation.

II.A.2 En régime sinusoïdal forcé, toutes les grandeurs évoluent de façon sinusoïdale. Utiliser la méthode complexe.

II.B.1 Exprimer la force électromagnétique que subissent l'électron et le noyau en négligeant le terme de propagation puis sommer.

II.B.2 Concernant les fonctions circulaires, il faut connaître les résultats suivants :

$$\langle \sin(\omega t) \cos(\omega t) \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \sin^2(\omega t) \rangle = \frac{1}{2}$$

III.A.4 Utiliser le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = \sum_i \vec{f}_i \cdot \vec{v}_i$$

III.B.1 Utiliser la définition de la température cinétique :

$$\frac{1}{2} M v_q^2 = \frac{3}{2} k_B T$$

Deuxième partie

IV.A Faire un bilan de matière à un temps quelconque en prenant en compte la création et la consommation des différentes espèces par les deux réactions. Faire attention à l'avancement volumique, qui a la dimension d'une concentration.

IV.B Écrire les vitesses des réactions (1) et (2) le plus simplement possible et remplacer les concentrations en fonction de $\xi_{v,\infty}$.

IV.C Utiliser le fait que toutes les courbes ne démarrent pas au temps $t = 0$.

IV.D.1 Identifier la vitesse de réaction qui augmente lorsque la concentration en eau augmente et celle qui n'évolue pas.

V.A.1 Établir le cycle thermodynamique faisant intervenir les données de l'énoncé.

V.A.2.b Écrire l'égalité des potentiels chimiques. Penser à établir une relation entre $\Delta_{\text{fus}} G^\circ(T)$ et les potentiels chimiques standard de l'eau liquide et de l'eau solide.

V.B.2 Il s'agit d'un dosage indirect. Utiliser les potentiels standard fournis par l'énoncé pour établir la seconde réaction.

V.B.3 Attention aux coefficients stœchiométriques.

PREMIÈRE PARTIE : LES ATOMES FROIDS

I. MODÈLE DE L'ÉLECTRON ÉLASTIQUEMENT LIÉ

I.A.1 Par définition de la densité volumique de charge, la charge électrique e du noyau vaut

$$e = \iiint_{\text{noyau}} \rho(N) \, d\tau$$

Le noyau de rayon a est chargé uniformément de sorte que la densité de charge est constante et l'intégrale se simplifie

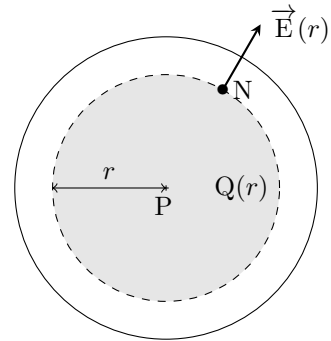
$$e = \rho \iiint_{\text{noyau}} d\tau = \rho \times \frac{4}{3} \pi a^3$$

Ainsi, le noyau est caractérisé par une densité de charge constante

$$\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$$

I.A.2 Adoptons un système de coordonnées sphériques d'origine P. La distribution de charge étant à symétrie sphérique, tout axe passant par P est axe de symétrie de sorte que le champ électrique créé en N est porté par l'axe PN. Il est alors radial. L'invariance de la distribution par rotation autour de P implique que l'intensité du champ électrique ne dépend que de la distance radiale r . Ainsi,

$$\vec{E}(r, \theta, \varphi) = E(r) \vec{e}_r$$



Par ailleurs, si l'on calcule le flux du champ électrique à travers la sphère S de centre P et de rayon r , le théorème de Gauss permet d'écrire

$$\Phi = \oiint_S \vec{E} \cdot d\vec{S}^{\text{ext}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\varepsilon_0} = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

où $Q(r)$ désigne la charge électrique contenue dans la sphère de rayon r . Poursuivons le calcul du flux en remarquant que $d\vec{S}^{\text{ext}} = dS \vec{e}_r$:

$$\Phi = \oiint_S E(r) \, dS = E(r) \oiint_S dS = E(r) 4\pi r^2$$

donc
$$\vec{E}(N) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \vec{e}_r \quad \text{avec} \quad r = PN$$

Le champ créé au point N est le même que celui produit par une charge ponctuelle centrée en P possédant une charge électrique $Q(r)$. Le point N étant à l'intérieur du noyau, on a

$$Q(r) = \rho \frac{4}{3} \pi r^3 = e \left(\frac{r}{a} \right)^3$$

Par conséquent,

$$\vec{E}(N) = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} r \vec{e}_r = \frac{e}{4\pi\varepsilon_0 a^3} \overrightarrow{PN}$$

I.A.3 Par définition du champ électrique, l'électron subit la force

$$\vec{F} = -e \vec{E}(\text{N}) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{PN}$$

L'action du noyau sur l'électron est donc une force de rappel de type élastique. Selon le principe des actions réciproques, le noyau subit une action \vec{F}' opposée :

$$\vec{F}' = -\vec{F}$$

I.B.1 En vertu du principe fondamental de la dynamique, le mouvement de l'électron est régi par l'équation différentielle

$$m \ddot{\vec{R}}_- = \vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{PN} \quad (1)$$

Quant au noyau,

$$M \ddot{\vec{R}}_+ = \vec{F}' = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{PN} \quad (2)$$

L'atome étant isolé, son centre d'inertie O n'est pas accéléré. Le référentiel barycentrique est alors galiléen et on peut donc y appliquer le principe fondamental de la dynamique.

I.B.2 Divisons (1) et (2) respectivement par m et M , puis soustrayons les nouvelles relations pour obtenir

$$\ddot{\vec{R}}_+ - \ddot{\vec{R}}_- = \left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{PN}$$

Introduisons le vecteur position relatif $\vec{R} = \vec{R}_+ - \vec{R}_- = \vec{NP}$. L'équation devient

$$\ddot{\vec{R}} = -\left(\frac{1}{M} + \frac{1}{m}\right) \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{R}$$

I.B.3 L'équation différentielle précédente devient

$$\mu \ddot{\vec{R}} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{R}$$

si l'on pose

$$\mu = \frac{mM}{m+M}$$

Ainsi, dans le référentiel d'étude, le mouvement relatif du noyau par rapport à l'électron est décrit par la même équation que celle d'une particule fictive de masse μ , de vecteur position \vec{R} subissant une force de nature élastique

$$\vec{F} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3} \vec{R} = -\mu\omega_0^2 \vec{R} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 a^3 \mu} = \frac{e^2(m+M)}{4\pi\epsilon_0 a^3 m M}$$

Mines Physique 1 MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Vincent Freulon (ENS Ulm) ; il a été relu par Louis Salkin (ENS Cachan) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve est composée de trois parties indépendantes qui abordent des méthodes vues au cours des deux années de classes préparatoires.

- La première partie porte sur l'étude d'un accéléromètre utilisé dans les smartphones et les manettes de jeu. On l'étudie comme un oscillateur harmonique amorti soumis à une excitation sinusoïdale. La conversion de la réponse mécanique de l'accéléromètre en un signal électrique est effectuée à l'aide d'une détection dont on établit les propriétés.
- Dans la deuxième partie, on analyse le fonctionnement d'un turboréacteur. Après avoir démontré des lois générales sur les systèmes ouverts en régime permanent, on se penche sur l'accélération d'un véhicule propulsé par le turboréacteur.
- Les interférences en optique sont utilisées dans la troisième partie pour diagnostiquer des défauts de surface. C'est l'interféromètre de Michelson qui est au cœur de cette étude, en coin d'air puis en lame d'air.

Cette épreuve est de longueur et de difficulté raisonnables. Elle touche à des domaines très différents du programme et constitue un bon entraînement aux épreuves de trois heures du concours Mines-Ponts.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Remarquer que $\ddot{x} = \ddot{L} + a$.
- 3 La fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas.
- 4 Écrire la loi des nœuds en termes des potentiels.
- 5 Chercher la solution de l'équation homogène, puis la solution particulière pour le cas du second membre constant et enfin la solution particulière correspondant au régime sinusoïdal forcé. La solution générale est une combinaison linéaire de ces trois solutions.
- 6 Montrer que
$$v_3(t) \simeq \frac{V_s}{2} + V_2 \sin \omega t$$
- 7 Après une brève discussion sur les invariances, invoquer les relations de passage pour le champ électrique à la traversée d'une interface.
- 10 Le filtre $R_f C_f$ ne laisse passer que la composante continue.

Partie II

- 11 Invoquer la conservation de la masse pour le système proposé par l'énoncé.
- 12 Sous sa forme la plus générale, le premier principe s'écrit

$$dE_c + dU = \delta W + \delta Q$$

- 14 Utiliser la loi de Laplace pour le gaz parfait.
- 15 La deuxième loi de Joule permet de relier la variation de température à la variation d'enthalpie.
- 16 Effectuer un bilan de quantité de mouvement.

Partie III

- 21 d_i dépend de n mais u n'en dépend pas.
- 22 d_i et u dépendent tous les deux de ε .
- 24 L'énoncé comporte une erreur : il faut rapprocher M_2 en sorte que $d < 0$.
- 25 Exprimer l'intensité lumineuse résultante. Exploiter les annulations du cosinus oscillant le plus lentement.

AUTOUR D'UN DRAGSTER À RÉACTION

I. MESURE DE L'ACCÉLÉRATION PAR UN SYSTÈME EMBARQUÉ

1 Écrivons la force due à chaque ressort. Pour le ressort de droite (indiqué 2),

$$\vec{F}_{r2} = k(x_2 - x - \ell_0) \vec{e}_x$$

où ℓ_0 est la longueur à vide du ressort. Pour le ressort de gauche (indiqué 1),

$$\vec{F}_{r1} = -k(x - x_1 - \ell_0) \vec{e}_x$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \vec{F}_r &= \vec{F}_{r1} + \vec{F}_{r2} \\ &= k(x_2 + x_1 - 2x) \vec{e}_x \\ &= 2k(x_e - x) \vec{e}_x \end{aligned}$$

donc

$$\boxed{\vec{F}_r = -2kL \vec{e}_x}$$

La force de friction est proportionnelle à la vitesse du point O par rapport aux deux amortisseurs solidaires du dragster qui évolue à la vitesse \dot{x}_e par rapport au sol. Cette force est donc proportionnelle à $\dot{x} - \dot{x}_e$. Mais $L = x - x_e$, d'où

$$\boxed{\vec{F}_a = -2f\dot{L} \vec{e}_x}$$

Le facteur « 2 » s'explique par la présence de deux amortisseurs.

Le paragraphe, en haut de la deuxième page de l'énoncé, peut paraître contradictoire puisque l'on y précise d'abord qu'il n'y a pas de frottements et un peu plus loin que le coefficient de frottement est noté f . Il faut certainement comprendre que l'on néglige tout frottement *solide* et que le coefficient pour le frottement *fluide* (supposé proportionnel à la vitesse) est noté f .

2 Après projection sur l'horizontale, le principe fondamental de la dynamique appliqué au dragster dans le référentiel du sol, supposé galiléen, s'écrit

$$m\ddot{x} = -2kL - 2f\dot{L}$$

On a la relation

$$\ddot{x} = \ddot{L} + a \quad (\text{car } \ddot{x}_e = a)$$

que l'on injecte dans l'équation précédente, pour obtenir

$$m\ddot{L} + 2f\dot{L} + 2kL = -ma$$

Utilisons les grandeurs ω_0 et μ introduites dans l'énoncé. Puisque

$$\mu\omega_0 = \frac{f}{m} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{2k}{m}$$

Il vient

$$\boxed{\ddot{L} + 2\mu\omega_0\dot{L} + \omega_0^2L = -a}$$

3 En notation complexe, l'équation différentielle précédente devient

$$-\omega^2 \underline{L} + 2j\mu\omega_0\omega \underline{L} + \omega_0^2 \underline{L} = -\underline{a}$$

Ainsi,

$$\frac{\underline{L}}{\underline{a}} = \frac{1}{\omega^2 - \omega_0^2 - 2j\mu\omega_0\omega}$$

Factorisons ω_0^2 au dénominateur de cette fraction,

$$\frac{\underline{L}}{\underline{a}} = \frac{G}{\xi^2 - 1 - 2j\mu\xi}$$

Il apparaît que cette fonction de transfert est celle d'un filtre passe-bas du second ordre. Pour que la mise en mouvement du capteur soit fidèlement reproduite (c'est-à-dire que l'on obtient bien a à une constante près quand on mesure L), il faut que $\xi \ll 1$ c'est-à-dire que

$$\omega \ll \omega_0$$

4 Écrivons la loi des nœuds,

$$\frac{v_3}{R} + \frac{v_3 - V_s}{R} + C_2 \frac{d(v_3 - v_2)}{dt} + C_1 \frac{d(v_3 - v_1)}{dt} = 0$$

Remplaçons v_1 et v_2 par leur expression et rassemblons les termes en v_3 ,

$$(C_1 + C_2) \frac{dv_3}{dt} + \frac{2}{R} v_3 = \frac{V_s}{R} + \omega V_1 (C_1 - C_2) \cos \omega t$$

d'où

$$\tau \frac{dv_3}{dt} + v_3 = \frac{V_s}{2} + \tau \omega V_2 \cos \omega t$$

5 La solution v_{3h} de l'équation sans second membre associée à cette équation est

$$v_{3h}(t) = V_0 e^{-t/\tau}$$

La solution particulière est la somme d'une fonction constante v_{3c} et d'une solution sinusoïdale v_{3s} oscillant à la pulsation ω . Pour déterminer v_{3c} , il suffit de l'injecter dans l'équation différentielle :

$$\tau \frac{dv_{3c}}{dt} + v_{3c} = 0 + v_{3c} = \frac{V_s}{2}$$

Par conséquent,

$$v_{3c}(t) = \frac{V_s}{2}$$

v_{3s} s'obtient en traduisant l'équation, en régime sinusoïdal forcé,

$$\tau \frac{dv_{3s}}{dt} + v_{3s} = \tau \omega V_2 \cos \omega t$$

qui devient

$$(j\tau\omega + 1)\underline{v}_{3s} = \tau\omega V_2 e^{j\omega t}$$

Ainsi,

$$\underline{v}_{3s} = \frac{\tau\omega}{1 + (\tau\omega)^2} (1 - j\tau\omega) V_2 e^{j\omega t}$$

$$\underline{v}_{3s} = \frac{\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} + j \frac{-\tau\omega}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}} \right) V_2 e^{j\omega t}$$

Mines Physique 2 MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Hadrien Vroylandt (ENS Cachan) ; il a été relu par Rémy Hervé (Professeur en CPGE) et Vincent Freulon (ENS Ulm).

Ce sujet porte sur un dipôle électronique non linéaire, souvent évoqué en classe préparatoire mais peu étudié en détail : la diode.

- La première partie du sujet s'intéresse aux propriétés de la « diode à vide », qui fut la première réalisation d'une diode. À partir d'hypothèses simples, on aboutit à la caractéristique courant-tension du dipôle. Cette partie se base sur l'électrostatique dans le vide et sur l'étude du mouvement des particules chargées en mécanique.
- Les deuxième et troisième parties sont très liées, puisqu'elles portent sur la réalisation d'une diode avec une jonction de semi-conducteurs, puis sur l'effet d'une différence de potentiel appliquée aux bornes de la jonction. On exprime la tension de seuil de la diode à jonction puis on s'intéresse aux propriétés dynamiques d'une diode bloquée. En plus de l'électrostatique, des notions d'électronique microscopique et d'électrocinétique sont nécessaires.
- Enfin, la dernière partie étudie l'utilisation du dispositif de la troisième partie dans un montage électronique, un récepteur radio. On explique les conditions d'utilisation de la diode dans ce montage, dans le cadre de l'électrocinétique des régimes sinusoïdaux forcés.

Ce sujet demande avant tout une analyse physique des résultats ; la compréhension des phénomènes physiques était essentielle pour réussir. Il permet de s'entraîner intensivement à l'électrostatique et à l'électronique.

INDICATIONS

Partie I

- 2 Pour le champ électrique, on peut par exemple prendre 1 V/m .
- 5 Orienter la surface pour obtenir une intensité positive.
- 6 Utiliser la conservation de la charge en régime stationnaire.
- 7 Partir des relations des questions 1 et 4.
- 9 Par continuité du potentiel, $V(x = d) = V_A$.
- 12 Les grandeurs utilisées dans cette partie sont des grandeurs mésoscopiques.

Partie II

- 13 Qu'arrive-t-il au nombre de trous et d'électrons quand la température augmente ?
- 15 Penser à la conservation de la charge.
- 16 Utiliser l'équation de Maxwell-Gauss.
- 19 Partir des résultats des questions 15 et 18.

Partie III

- 21 S'appuyer sur les éléments fournis par l'énoncé pour justifier que les migrations de charge entre les deux régions dopées sont possibles si les électrons arrivent par la région dopée N ($V > 0$) et impossibles s'ils arrivent par la région dopée P ($V < 0$).
- 22 Utiliser les résultats des questions 14, 15 et 18.

Partie III

- 27 Quel impact aurait la tension U sur le montage en l'absence de la capacité C_i ?
Comment la capacité y remédie-t-elle ?
- 28 Utiliser les résultats des questions 23 et 24.

À PROPOS DES DIODES

I. DIODE À VIDE

1 L'équation de Poisson liant le potentiel et la densité de charges est

$$\Delta V + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0$$

le potentiel V n'étant supposé dépendre que de x , toutes les dérivées selon y et z sont nulles, d'où

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{\rho}{\varepsilon_0} = 0}$$

2 Calculons, d'une part le poids d'un électron et d'autre part la force électrostatique pour un faible champ électrique :

- Le calcul du poids donne $|\mathbf{F}_{\text{poids}}| = |mg| = 8,94 \cdot 10^{-30} \text{ N}$;
- Pour le calcul de la force électrostatique, prenons le champ électrique créé par une différence de potentiel U de 1,00 V sur une distance d de 1,00 m ; on obtient $|\mathbf{F}_{\text{élec}}| = |eE| = |eU/d| = 1,60 \cdot 10^{-19} \text{ N}$.

La force électrostatique créée par ce champ faible étant supérieure de plusieurs ordres de grandeur au poids, celui-ci est négligeable devant la force électrostatique.

3 La force électrostatique a pour expression

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{F}}_{\text{élec}} &= q \vec{\mathbf{E}} \\ &= -q \vec{\text{grad}} V \\ \vec{\mathbf{F}}_{\text{élec}} &= -\vec{\text{grad}} qV \end{aligned}$$

et donc, par définition d'une force conservative,

$$\vec{\mathbf{F}}_{\text{élec}} = -\vec{\text{grad}} E_{\text{pot}}$$

D'où,

$$\boxed{E_{\text{pot}} = qV + C^{\text{te}}}$$

Dans la suite, on choisit de prendre la constante égale à zéro.

4 En l'absence de forces dissipatives le théorème de l'énergie mécanique s'écrit

$$E_{\text{tot}}(x) = E_{\text{tot}}(0)$$

avec
$$E_{\text{tot}}(x) = \frac{m}{2} v^2(x) - eV(x)$$

Comme, en $x = 0$, la vitesse des électrons et le potentiel électrostatique sont nuls :

$$\frac{m}{2} v^2(x) - eV(x) = 0$$

Par conséquent,

$$\boxed{\vec{v}(x) = \sqrt{\frac{2eV(x)}{m}} \vec{e}_x}$$

5 La densité de courant s'exprime par $\vec{j}(x) = \rho(x)\vec{v}(x)$. L'intensité électrique $I(x)$ traversant une surface d'aire S située à une distance x de la cathode et parallèle à celle-ci est alors

$$I(x) = \left| \iint_S \vec{j}(x) \cdot d\vec{S} \right|$$

$$= \left| \iint_S \rho(x)\vec{v}(x) \cdot d\vec{S} \right|$$

$$I(x) = - \iint_S \rho(x)v(x) dS$$

car $\rho < 0$ et $v(x)$ est la norme de la vitesse. Par suite,

$$\boxed{I(x) = -\rho(x)v(x)S}$$

Le signe est ici affaire de convention puisqu'il dépend du choix d'orientation du vecteur $d\vec{S}$. Il y a donc ambiguïté puisque l'énoncé ne précise pas explicitement le signe que l'on doit obtenir. On a choisi une intensité positive pour être cohérent avec la question 7, plus précisément pour garantir la positivité de la constante a qui y est définie.

6 On a, en tout point de l'espace inter-électrodes, l'équation de conservation suivante qui découle de la conservation de la charge

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\frac{\partial j}{\partial x}$$

La charge volumique ne dépendant pas du temps par hypothèse, il vient

$$\frac{\partial j}{\partial x} = 0$$

Le débit de charge est donc constant en tout point de l'espace inter-électrodes, d'où

$$\boxed{\text{L'intensité } I \text{ ne dépend pas de } x.}$$

7 En remplaçant la densité de charges et la vitesse des électrons par les expressions obtenues aux questions 1 et 4, on obtient

$$I = S\varepsilon_0 \frac{d^2V}{dx^2} \sqrt{\frac{2eV}{m}}$$

d'où

$$\boxed{\frac{d^2V}{dx^2} = \frac{a}{\sqrt{V}}}$$

On peut remarquer que si un choix différent avait été fait pour le signe de l'intensité, la constante a serait négative et non positive comme dans l'énoncé.

Mines Chimie MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Mickaël Profeta (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Fabrice Maquère (Professeur agrégé) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Comme c'est généralement d'usage pour l'épreuve de chimie de la filière MP au concours des Mines, ce sujet s'intéresse à un élément. Cette année, le plomb est à l'honneur. Le sujet traite essentiellement d'oxydoréduction et est divisé en cinq petites parties.

- On commence par une très rapide étude structurale avec une justification qualitative de la masse molaire du plomb, puis vient un calcul relatif aux énergies d'ionisation et on termine par l'écriture d'une maille cristalline et de la masse volumique du plomb.
- La deuxième partie traite du diagramme d'Ellingham du plomb. On aborde les questions classiques concernant l'approximation d'Ellingham, les nombres d'oxydation du plomb dans ses oxydes et l'attribution des domaines dans le diagramme. On utilise ensuite le tracé fourni pour déterminer l'enthalpie standard de fusion du plomb ainsi que la nature de l'oxyde formé lors d'une oxydation par l'air.
- La troisième partie aborde le diagramme potentiel-pH du plomb. Celui-ci est donné et l'on commence par attribuer les différents domaines. Viennent ensuite deux calculs pour déterminer l'équation d'une des droites frontières ainsi que le produit de solubilité de PbO .
- La quatrième partie étudie l'accumulateur au plomb qui constitue l'immense majorité des batteries que l'on utilise dans les véhicules. L'accumulateur représente d'ailleurs les $3/4$ de la consommation mondiale de plomb. On établit son schéma de fonctionnement ainsi que les réactions intervenant aux électrodes. On réutilise le diagramme potentiel-pH de la partie précédente pour déterminer des potentiels standard d'oxydoréduction ainsi que la force électromotrice de l'accumulateur.
- La dernière partie concerne le dosage des ions Pb^{2+} présents dans une peinture. Le dosage est mené par titrage rédox. C'est l'occasion d'écrire des bilans d'oxydoréduction, de calculer une constante d'équilibre pour une réaction et enfin de déterminer la concentration en ions Pb^{2+} dans la peinture.

Cette épreuve, si elle reste dans le strict cadre du programme, est beaucoup plus difficile que les années précédentes. Aucune question n'est réellement piégeuse mais l'énoncé est assez complexe. Signalons d'ailleurs que la présence de l'erratum ne facilite pas sa lecture, la version initiale du protocole mis en œuvre lors du dosage étant totalement incompréhensible. Elle nécessite une bonne maîtrise de l'oxydoréduction et un recul qu'il est difficile de posséder en filière MP. Le jury a sûrement été sensible à cette situation pour valoriser les candidats qui ont fait preuve de clarté et de simplicité. Avoir une très bonne note à cette épreuve est tout à fait accessible pour quiconque n'a pas lâché la matière durant l'année. S'entraîner sur les épreuves des années précédentes reste très efficace dans cette filière car les thèmes abordés sont très souvent identiques d'une année sur l'autre.

INDICATIONS

Partie A

- 1 Le noyau contient des protons mais aussi des neutrons. Pour les noyaux lourds, il y a plus de neutrons que de protons.
- 2 Ne pas oublier l'état physique associé à l'ionisation. Attention, la deuxième ionisation se produit à la suite de la première.
- 3 Les ions sont tangents sur la diagonale du cube. Exprimer le paramètre de maille a en fonction de r_+ et r_- .

Partie B

- 4 L'approximation d'Ellingham n'est valable qu'en dehors des changements d'état.
- 5 Pb_3O_4 est un oxyde mixte : le plomb a deux états d'oxydation différents.
- 6 Placer les espèces par degré d'oxydation croissant.
- 7 Il ne suffit pas de soustraire les ordonnées à l'origine. Écrire la combinaison linéaire entre les réactions d'oxydation du plomb solide, liquide et la réaction de fusion.
- 8 Écrire l'expression de $\Delta_r S^\circ$. Que peut-on dire pour l'entropie molaire des gaz ?
- 9 Il y a 20 % de dioxygène dans l'air. Placer le point correspondant dans le diagramme.

Partie C

- 10 Écrire les équations acido-basiques pour trouver les espèces les plus basiques.
- 12 Écrire la réaction avec l'eau pour la dissolution de $\text{PbO}_{(s)}$.

Partie D

- 13 Déterminer l'oxydant le plus fort et le réducteur le plus fort à l'aide du diagramme potentiel-pH.
- 14 Écrire les potentiels de Nernst pour les deux couples. L'ordonnée à l'origine n'est pas égale au potentiel standard !
- 15 Dans le milieu considéré, l'acide sulfurique est quasi-pur. L'activité des ions sulfate est égale à 1 et non à leur concentration.
Exprimer la force électromotrice en fonction des potentiels des couples. En présence de précipité $\text{PbSO}_{4(s)}$, il y a aussi les ions Pb^{2+} .

Partie E

- 17 Ne pas oublier la dilution de I^- .
- 18 Cr^{3+} est oxydé en CrO_4^{2-} puis vient la précipitation de $\text{PbCrO}_{4(s)}$.
- 19 Le dosage est l'oxydation de Fe^{2+} par CrO_4^{2-} .
- 20 La dissolution de $\text{PbCrO}_{4(s)}$ pour former la solution S produit autant d'ions Pb^{2+} que d'ions CrO_4^{2-} que l'on dose.

LE PLOMB

A. Étude structurale

1 Le noyau des atomes est constitué de Z (numéro atomique) protons et de $(A - Z)$ neutrons, avec A le nombre de masse. La masse molaire est environ égale à $A \text{ g.mol}^{-1}$. Pour les noyaux très lourds, comme c'est le cas pour le plomb, il y a plus de neutrons que de protons pour assurer la stabilité, de sorte que l'on attend une masse molaire supérieure à $2Z = 164 \text{ g.mol}^{-1}$, ce qui est bien le cas ici.

2 L'énergie de première ionisation est l'énergie minimale à fournir pour arracher un électron à l'atome gazeux. L'énergie de deuxième ionisation est l'énergie minimale à fournir à l'ion obtenu (toujours gazeux) pour arracher un deuxième électron.

Les équations des réactions correspondantes sont :

$$\text{Pb}_{(g)} = \text{Pb}^+_{(g)} + e^-$$

et

$$\text{Pb}^+_{(g)} = \text{Pb}^{2+}_{(g)} + e^-$$

L'énergie associée à un rayonnement électromagnétique de fréquence ν et de longueur d'onde λ est

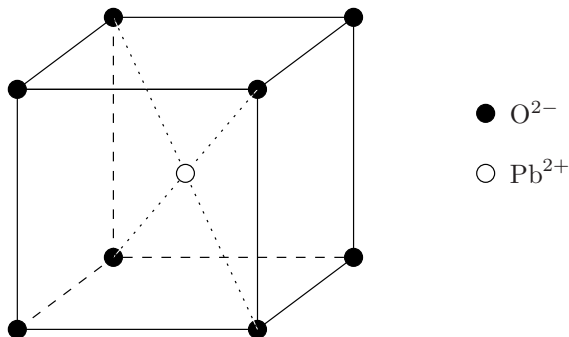
$$E = h\nu = \frac{hc}{\lambda} = 1,5 \cdot 10^{-18} \text{ J}$$

soit, pour une mole, $E = 9 \cdot 10^2 \text{ kJ.mol}^{-1}$

On a donc $715 \text{ kJ.mol}^{-1} < E < 1450 \text{ kJ.mol}^{-1}$

On peut observer la première ionisation mais pas la deuxième.

3 La structure de la maille est



Dans cette maille, il y a 1 cation Pb^{2+} et un anion O^{2-} :

$$N_{\text{Pb}^{2+}} = 1 \times 1 = 1 \quad \text{et} \quad N_{\text{O}^{2-}} = 8 \times \frac{1}{8} = 1$$

| On vérifie que l'on retrouve bien la stoechiométrie de l'oxyde PbO .

Il y a contact entre les ions sur la diagonale du cube :

$$\frac{a\sqrt{3}}{2} = r_+ + r_-$$

d'où
$$a = \frac{2}{\sqrt{3}}(r_+ + r_-)$$

La masse volumique peut s'écrire pour une maille :

$$\rho = \left(\frac{m}{V}\right)_{\text{maille}} = \frac{N_{\text{Pb}^{2+}} \times M_{\text{Pb}} + N_{\text{O}^{2-}} \times M_{\text{O}}}{\mathcal{N}_A a^3}$$

soit

$$\rho = \frac{3\sqrt{3}(M_{\text{Pb}} + M_{\text{O}})}{8\mathcal{N}_A (r_+ + r_-)^3}$$

B. Oxydes de plomb : diagramme d'Ellingham

4 Dans l'approximation d'Ellingham, on considère que $\Delta_r H^\circ$ et $\Delta_r S^\circ$ sont indépendants de la température en dehors des changements d'état des constituants impliqués dans la réaction. Comme

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T \Delta_r S^\circ$$

la fonction $\Delta_r G^\circ = f(T)$ est affine par morceaux. Il y a des ruptures de pente à chaque changement d'état d'un constituant.

Le diagramme d'Ellingham est la représentation des droites $\Delta_r G^\circ = f(T)$. On ajoute, comme c'est le cas dans l'énoncé, $RT \ln(P_{\text{O}_2}/P^\circ)$ pour donner du sens aux domaines au-dessus et en dessous des courbes et pas seulement aux droites d'équilibre.

5 Le nombre d'oxydation de l'oxygène étant $-II$ dans ces oxydes, on a pour le plomb les états d'oxydation suivants :

$$\text{PbO} : +II \quad \text{Pb}_3\text{O}_4 : +\frac{8}{3} \quad \text{PbO}_2 : +IV$$

Pour Pb_3O_4 , il s'agit d'un degré d'oxydation moyen sur les trois atomes de plomb. On a en réalité 2 atomes au degré $+II$ et 1 au degré $+IV$. On dit que Pb_3O_4 est un oxyde mixte.

6 Dans un diagramme d'Ellingham, les espèces les plus oxydées se situent au-dessus des espèces les moins oxydées. On obtient alors, par degré d'oxydation croissant du plomb, les domaines suivants :

X Physique MP 2013 — Corrigé

Ce corrigé est proposé par Benoît Lobry (Professeur en CPGE) ; il a été relu par Vincent Freulon (ENS Ulm) et Stéphane Ravier (Professeur en CPGE).

Cette épreuve porte sur l'étude des colloïdes, petites sphères solides, neutres ou chargées, plongées dans une solution.

- La première partie envisage une suspension colloïdale neutre dans un champ de pesanteur. On y étudie les effets combinés de la pesanteur et de l'agitation thermique sur cette suspension à travers la distribution de Maxwell-Boltzmann.
- Dans la deuxième, les colloïdes sont chargés et plongés dans un électrolyte. La distribution de Maxwell-Boltzmann permet, après calculs, de caractériser l'écrantage du potentiel des colloïdes par les ions en solution de charge opposée.
- Enfin, dans la troisième partie, on s'intéresse à l'interaction de colloïdes imparfaitement écrantés puis à leur agrégation.

Commençons par signaler que la deuxième partie du problème débute par des considérations sur la diffusion particulière hors-programme dans la filière MP et que les deux premières questions de cette partie ne peuvent donc pas être résolues. C'est une grave erreur de conception. Cependant, comme la logique de l'énoncé veut que l'on procède ensuite par analogie avec la première partie, les conséquences sont limitées. Dans un deuxième temps, on peut remarquer qu'une part très importante de l'épreuve repose sur la distribution de Maxwell-Boltzmann. Son expression n'est pas rappelée. Il s'agit d'un détail du programme de Sup étudié sous l'appellation de facteur de Boltzmann qui s'avère ici déterminant pour la résolution du problème. Cela montre l'intérêt de ne faire aucune impasse lors des révisions. Enfin, signalons que, comme les années précédentes, l'épreuve repose essentiellement sur l'électromagnétisme et que la calculatrice n'était pas autorisée malgré la présence d'applications numériques assez laborieuses.

INDICATIONS

- 1 La constante des gaz parfaits vérifie $R = \mathcal{N}_A k_B$.
- 2 Évaluer la masse des colloïdes dans le volume $\delta V = S dz$ puis celle du fluide dans le volume laissé libre. La pression totale est $P = P_f + P_c$.
- 5 Écrire, en interprétant $E_p(z)$ et $k_B T$,

$$n(z) = n_0 \exp \left[- \frac{E_p(z)}{k_B T} \right]$$

Utiliser $n(z)$ pour définir le nombre δN de colloïdes dans le volume $\delta V = S dz$. Calculer le nombre total N_{tot} de colloïdes. En déduire δp .

- 7 Vérifier l'hypothèse de régime dilué en comparant le volume δV au volume qu'occupent les colloïdes.
- 9 L'extension élémentaire δz doit correspondre à un grand nombre de particules.
- 10 Que valent la vitesse limite v_{col} et le temps caractéristique τ de chute sur une hauteur H ?
- 11 Partir de $J_C = n v_{\text{ion}}$ et admettre que $\vec{J}_D = -D \overrightarrow{\text{grad}} n$.
- 12 Que doit valoir le courant total J en régime stationnaire?
- 14 Utiliser l'expression générique $\rho = nq$ en considérant les deux types d'ions. Le potentiel $V(x)$ vérifie l'équation de Poisson.
- 18 $\Psi(X)$ ne doit pas diverger en $X \rightarrow +\infty$. Utiliser le théorème de Coulomb.
- 19 Interpréter le tracé de $E(x)$ dans l'électrolyte en termes d'écrantage.
- 23 Intégrer l'équation (3) après l'avoir multipliée par $d\Psi/dX$.
- 25 Utiliser le théorème de Coulomb et la relation (4).
- 26 Mieux vaut utiliser l'expression de ρ_{sol} issue sans modification de l'équation de Maxwell-Gauss que celle évaluée à la question 24.
- 30 Comparer $|\rho_{\text{sol}}|(0)$ à la charge volumique maximale $|\rho_{\text{sol}}|_{\text{max}}$ qui correspond à des ions de diamètre $d \simeq 1 \text{ \AA}$ et de charge $q = -e$ accolés de manière compacte.
- 31 Justifier que la seconde ligne de résultats numériques correspond aux caractéristiques de l'électrolyte après écrantage par la première couche compacte. La différence entre les deux charges surfaciques σ_0 est due à la couche compacte de densité volumique $|\rho_{\text{sol}}|_{\text{max}}$.
- 34.a La force électromotrice du générateur est V_c et le courant débité $i = 2 \times dQ_c/dt$.
- 34.b Écrire les premier et second principes pour une évolution réversible.
- 34.c Poser $G = U - 2V_c Q_c - TS$.
- 34.d Dessiner deux chemins composés chacun d'une évolution à ℓ constante et d'une autre à V_c constant. Que dire de $F_{\text{op}}(0, \ell)$? Relier $\sigma(V_c, \ell_\infty)$ à la partie II.
- 34.e Relier simplement F à F_{op} et injecter dans l'équation (6). Par ailleurs,

$$\sigma_0(\ell_\infty, V_c) - \sigma_0(\ell_0, V_c) = \int_{\ell_0}^{\ell_\infty} \frac{\partial \sigma_0}{\partial \ell}(\ell, V_c) d\ell$$

Inverser les intégrales suivant les variables V_c et ℓ puis identifier $F(V_0, \ell)$. Les colloïdes portent la même charge surfacique $\sigma_0(\ell, V_c)$.

- 36 La charge et le volume totaux sont conservés.

QUELQUES ASPECTS DE L'INTERACTION COULOMBIENNE

I. SUSPENSION COLLOÏDALE ET DISTRIBUTION DE MAXWELL-BOLTZMANN

1 Soient δN colloïdes d'or contenus dans un volume δV à la température T et à la pression P_c . L'équation d'état du gaz parfait appliquée à ces $\delta N/\mathcal{N}_A$ moles donne

$$P_c \delta V = \frac{\delta N}{\mathcal{N}_A} RT$$

Or $n = \delta N/\delta V$ et $k_B = R/\mathcal{N}_A$ donc

$$P_c = nk_B T$$

2 Considérons un volume de solution $\delta V = S dz$ de section S et de masse δm , entre les cotes z et $z + dz$. Sa masse δm est due aux colloïdes d'or qu'il contient et au fluide qui occupe le volume laissé libre. Ces colloïdes sont au nombre de $nSdz$ et leur volume est $nSdz v$. La masse des colloïdes est donc

$$\delta m_{\text{or}} = nSdz v \rho_{\text{or}}$$

et celle du fluide

$$\delta m_{\text{f}} = (Sdz - nSdz v) \rho_{\text{f}}$$

L'équilibre des forces de pression et de pesanteur exercées sur le volume impose

$$P(z)S - P(z + dz)S - \delta m g = 0$$

Substituons $\delta m = \delta m_{\text{or}} + \delta m_{\text{f}}$ dans cette équation et en posons $\Delta\rho = \rho_{\text{or}} - \rho_{\text{f}}$,

$$P(z) - P(z + dz) - (\rho_{\text{f}} + nv\Delta\rho) g dz = 0$$

d'où
$$-\frac{dP}{dz} - g\rho_{\text{f}} - nv g \Delta\rho = 0 \tag{0}$$

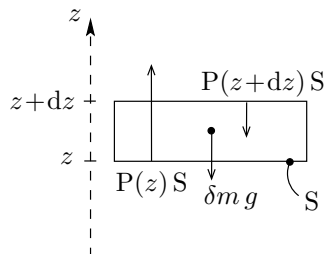
La pression totale P est la somme de la pression partielle du fluide P_{f} et de celle du gaz colloïdal $P_c = nk_B T$ établie à la question précédente, donc

$$P = P_{\text{f}} + nk_B T$$

On déduit de l'équation (0) que

$$\boxed{\frac{dP_{\text{f}}}{dz} + g\rho_{\text{f}} + k_B T \frac{dn}{dz} + nv g \Delta\rho = 0} \tag{1}$$

Le terme $vg \Delta\rho$ peut s'interpréter comme la résultante de la pesanteur et de la poussée d'Archimède subies par un colloïde isolé dans le fluide.



3 La relation de l'hydrostatique vérifiée par le fluide en régime dilué est

$$\frac{dP_f}{dz} + \rho_f g = 0$$

L'équation (1) devient $k_B T \frac{dn}{dz} + n v g \Delta \rho = 0$

soit
$$\boxed{\frac{dn}{dz} + \frac{v g \Delta \rho}{k_B T} n = 0} \quad (1')$$

4 L'équation (1') est une équation différentielle d'ordre 1 à coefficients constants qui se résout en

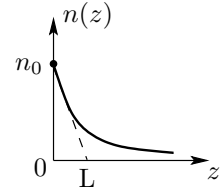
$$\boxed{n(z) = n_0 \exp\left(-\frac{v g \Delta \rho}{k_B T} z\right)}$$

On fait apparaître une longueur caractéristique L en notant

$$n(z) = n_0 e^{-z/L} \quad \text{avec} \quad L = \frac{k_B T}{v g \Delta \rho}$$

Comme le volume d'un colloïde sphérique est $v = 4\pi a^3/3$, il vient

$$\boxed{L = \frac{3k_B T}{4\pi a^3 g \Delta \rho} = 4.10^{-5} \text{ m}}$$



Une telle application numérique est laborieuse sans calculatrice. Pour l'exemple, avec un chiffre significatif, on pose $\Delta \rho = \rho_{or} = 2.10^4 \text{ kg.m}^{-3}$ et

$$L = \frac{3 \times 1.10^{-23} \times 3.10^2}{4 \times 3 \times 1.10^{-22} \times 1.10^1 \times 2.10^4} = \frac{3.10^{-21}}{8.10^{-17}} = 4.10^{-5} \text{ m}$$

5 Écrivons $n(z) = n_0 \exp\left[-\frac{E_p(z)}{k_B T}\right]$

où $k_B T$ est une énergie liée à l'agitation thermique et

$$E_p(z) = v \Delta \rho g z = v(\rho_{or} - \rho_f) g z$$

est l'énergie potentielle d'un colloïde d'or isolé soumis à la pesanteur et à la poussée d'Archimède. Cette écriture de $n(z)$ traduit l'**équilibre entre l'agitation thermique** qui tend à uniformiser la suspension et la résultante de la **pesanteur** et de la **poussée d'Archimède** qui tendent à sédimenter les colloïdes au bas de la solution. Notons à nouveau S la section de la solution. Le nombre total de colloïdes est

$$\begin{aligned} N_{\text{tot}} &= \int_{z=0}^H n(z) dV \\ &= \int_{z=0}^H n_0 e^{-z/L} S dz \\ &= n_0 S L \left[1 - e^{-H/L}\right] \end{aligned}$$

$$N_{\text{tot}} \simeq n_0 S L$$

car $H \gg L$. Par ailleurs, le nombre de colloïdes dans le volume $\delta V = S \delta z$ est

$$\delta N = n(z) S \delta z = n_0 S e^{-z/L} \delta z$$

X Physique et Sciences de l'ingénieur MP 2013

Corrigé

Ce corrigé est proposé par Olivier Frantz (Professeur agrégé en école d'ingénieur) ; il a été relu par Guillaume Maimbourg (ENS Cachan) et Vincent Freulon (ENS Ulm).

L'épreuve a pour thème le haut-parleur et présente différents aspects de son fonctionnement, en se focalisant sur les améliorations pouvant lui être apportées.

- La partie 1 est classique. Elle propose l'étude électromécanique du haut-parleur afin de déterminer les équations de fonctionnement, qui seront utilisées dans les parties suivantes.
- Dans la partie 2, des méthodes pratiques, électriques et interférométriques, sont exposées, qui ont pour but de trouver les grandeurs caractéristiques du haut-parleur. Les questions ne sont pas classiques au sens strict mais ne surprendront pas le candidat à l'aise en travaux pratiques.
- La partie 3, typée sciences de l'ingénieur, s'intéresse à une machine de bobinage, qui peut avoir été vue en TP. Cette trancanneuse permet l'enroulement multicouche du fil avec inversion de sens de translation automatique.
- Enfin, la dernière partie aborde brièvement les asservissements qui permettent une fidélité plus grande du haut-parleur, à travers deux chaînes de retour, sur la vitesse ou sur l'accélération.

Les questions posées dans ce sujet sont variées et abordables en quatre heures. La première partie doit permettre d'assurer une note minimale alors que la deuxième nécessite d'avoir plus réfléchi sur l'électricité et l'optique ondulatoire. Les candidats n'ayant négligé ni la mécanique ni la partie de cours sur les asservissements pouvaient faire la différence dans les parties 3 et 4 qui, sans aller trop loin, demandent un peu de temps et de réflexion. De nombreuses questions pratiques et qualitatives sont disséminées tout au long du sujet et distinguaient les candidats ayant le plus de recul sur le programme.

INDICATIONS

Partie 1

- 2 Dessiner un schéma électrique équivalent et utiliser la loi des mailles.
- 5 Les suspensions sont identifiées dans le texte pages 1 et 2 et sur la figure 1.
- 6 Appliquer le principe de la statique en projection sur un axe vertical.
- 7.a Projeter le principe fondamental de la dynamique sur l'axe \vec{u}_z .
- 10 Multiplier l'équation [E] par l'intensité.
- 11 Multiplier l'équation [M] par la vitesse.
- 13 La moyenne de la dérivée d'un signal périodique est nulle.
- 14 Utiliser la loi de Laplace pour les gaz parfaits et en effectuer un développement limité pour une petite variation de pression et de volume Σz .
- 18.b Les résistances R_e et R_m sont indépendantes de la pulsation ω et la représentation permet de passer facilement de β_m à $1/\beta_m$.

Partie 2

- 20.c Exprimer le module au carré de la tension \underline{U}_{AS} avec la somme de \underline{U}_{AB} et \underline{U}_{BS} .
- 21.a Le complexe d'argument $\pi/4$ a sa partie réelle égale à sa partie imaginaire. On doit résoudre deux équations du second ordre et ne garder que les solutions positives.
- 27 La définition de la fréquence comme nombre de cycles par unité de temps permet de conclure en remarquant que $\cos \omega t$ parcourt quatre fois l'intervalle $[0; 1]$ sur une période.
- 29 Puisque $|\psi_m|$ est faible, effectuer un développement limité de V_D .

Partie 3

- 30.a Écrire la composition des vitesses entre les solides (1), (3) et (5). Utiliser la condition de roulement sans glissement entre les solides (3) et (5). Identifier les solides en translation et rotation pour écrire simplement la vitesse du point A.
- 33 La vitesse du chariot et la vitesse de translation du fil sont égales.
- 34 Le pas d'enroulement du fil doit être égal au diamètre du fil pour que les spires soient jointives.

Partie 4

- 38 Étudier la fonction de transfert aux limites (pulsation nulle ou infinie).
- 48 Trouver les domaines de variation possible de (H_3, ω_3, ζ_3) lorsque K_1 et K_2 varient.

UN TRANSDUCTEUR ÉLECTRODYNAMIQUE : LE HAUT-PARLEUR

1. FONCTIONNEMENT DE BASE

1.1 Équation électrique

1 Un circuit électrique en mouvement dans un champ magnétique permanent est le siège d'un champ électromoteur dit de Lorentz de la forme

$$\vec{E}_m = \vec{v} \wedge \vec{B}$$

D'un bout à l'autre du circuit, ce champ électromoteur se manifeste par une force électromotrice telle que

$$e = \oint_{\text{circuit}} \vec{E}_m \cdot d\vec{\ell}$$

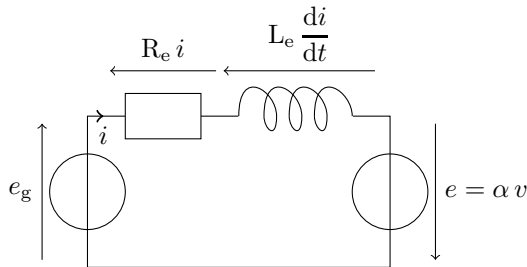
Le champ magnétique étant radial, le champ électromoteur est contenu dans le plan $(\vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$. Or, la portion de circuit $d\vec{\ell} = a d\theta \vec{u}_\theta$ est orthoradiale. Le produit scalaire implique que seule la composante de la vitesse selon l'axe Oz contribue à la force électromotrice dans la bobine, partie mobile du circuit.

$$e = \int_{\text{bobine}} (\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot d\vec{\ell} = \int_{\text{bobine}} (Bv \vec{u}_\theta) \cdot (a \vec{u}_\theta) d\theta$$

et

$$e = Bv\ell$$

2 Le circuit électrique équivalent au haut-parleur est constitué de la source de tension idéale e_g , de la résistance R_e , de l'inductance L_e et de la force électromotrice exprimée à la question précédente $e = B\ell v = \alpha v$.



En appliquant la loi des mailles, on obtient l'équation électrique,

$$e_g + \alpha v = R_e i + L_e \frac{di}{dt} \quad [E]$$

La force électromotrice est toujours fléchée en convention générateur : dans le même sens que l'intensité.

3 Lorsque la tension d'alimentation est sinusoïdale et le circuit linéaire, on peut exprimer l'équation [E] en utilisant le formalisme complexe :

$$\underline{E}_g = R_e \underline{I} + j L_e \omega \underline{I} - \alpha \underline{V}$$

d'où

$$\underline{E}_g = \underline{Z}_e \underline{I} - \alpha \underline{V} \quad \text{avec} \quad \underline{Z}_e = R_e + j L_e \omega$$

1.2 Équation mécanique

4 La force de Laplace qui s'exerce sur un élément de bobine de longueur $d\vec{\ell}$ s'écrit

$$\begin{aligned} d\vec{F}_L &= i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} \\ &= -i B a d\theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\vec{F}_L = -i \ell B \vec{u}_z = -i \alpha \vec{u}_z$$

Cette force est dirigée dans le sens opposé à la vitesse de la bobine.

5 La suspension de raideur K_r est dite de **centrage et porte le numéro 2** et celle de raideur K_a est **identifiée par le numéro 6**.

6 Appliquons le principe fondamental de la statique à l'équipage mobile, en projection sur un axe vertical. Seuls le poids et le ressort de raideur K_r interviennent verticalement ce qui conduit à

$$0 = -K_r \delta_e + M_E g$$

soit

$$\delta_e = \frac{M_E g}{K_r} = 3.10^{-8} \text{ m}$$

Le défaut d'alignement de la bobine dans l'entrefer est négligeable devant l'amplitude des mouvements axiaux.

7.a Les forces suivantes sont dirigées selon l'axe Oz :

- la force de frottement $\vec{F}_f = -h \vec{v}$;
- la force de Laplace \vec{F}_L exprimée à la question 5 ;
- la force de rappel de la suspension $-K_a(z - z_0) \vec{u}_z$.

z_0 est la position de l'équipage mobile au repos. Aucune autre action mécanique ne possède de composante selon l'axe Oz. Le principe fondamental de la dynamique s'écrit, en projection sur l'axe Oz,

$$M_E \frac{d\vec{v}}{dt} = -h \vec{v} - i \alpha \vec{u}_z - K_a(z - z_0) \vec{u}_z = -h \vec{v} - i \alpha \vec{u}_z - K_a \int_{t_0}^t \vec{v} dt$$

On retrouve ainsi l'équation (2), en notant $z(t_0) = z_0$ et $z(t) = z$,

$$\vec{F}_L = h \vec{v} + M_E \frac{d\vec{v}}{dt} + i \alpha \vec{u}_z + K_a \int_{t_0}^t \vec{v} dt \quad (2)$$

Constantes chimiques

I Principaux indicateurs colorés de pH

	Couleur de la forme acide	Zone de virage	Couleur de la forme basique
rouge de métacrésol	rouge	1,2 – 2,8	jaune
hélianthine	rouge	3,1 – 4,4	jaune
vert de bromocrésol	jaune	3,8 – 5,4	bleu
rouge de chlorophénol	jaune	4,8 – 6,4	rouge
bleu de bromothymol	jaune	6,0 – 7,6	bleu
rouge neutre	rouge	6,8 – 8,0	jaune
rouge de crésol	jaune	7,2 – 8,8	rouge
phénolphtaléine	incolore	8,2 – 10,0	rouge violacé
jaune d'alizarine R	jaune	10,0 – 12,1	rouge
carmin d'indigo	bleu	11,6 – 14	jaune

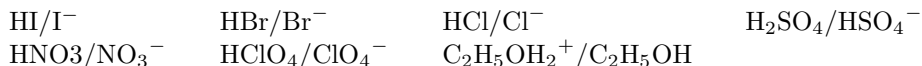
II Principaux indicateurs colorés rédox

	Couleur de la forme oxydée	Potentiel standard à pH = 0 (en V)	Couleur de la forme réduite
Fe II, 1-10 phénanthroline	bleu pâle	1,14	rouge
Fe II, 2 – 2' bipyridyl	bleu très pâle	1,02	rouge
acide N phénylanthranilique	rouge pourpre	0,89	incolore
acide diphénylamine- sulfonique	rouge violet	0,85	incolore
diphénylamine	violet	0,76	incolore
empois d'amidon	bleu	0,53	incolore
bleu de méthylène	bleu	0,52	incolore

III Valeurs de pKa les plus utiles

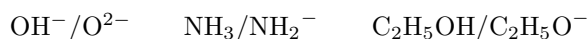
1 Acides nivelés

Dans les couples suivants, l'acide est nivelé (il n'existe pas dans l'eau) et la base est indifférente (elle n'a pas d'action sur l'eau).



2 Bases nivelées

Dans les couples suivants, la base est nivelée (elle n'existe pas dans l'eau) et l'acide est indifférent (il n'a pas d'action sur l'eau).



3 Couples acide faible / base faible

	Acide	pKa	Base	
	H ₂ O	14	OH ⁻	
	HS ⁻	13,0	S ²⁻	
	HPO ₄ ²⁻	12,7	PO ₄ ³⁻	ion phosphate
	HCO ₃ ⁻	10,2	CO ₃ ²⁻	ion carbonate
phénol	C ₆ H ₅ OH	9,9	C ₆ H ₅ O ⁻	ion phénolate
ion ammonium	NH ₄ ⁺	9,2	NH ₃	ammoniac
acide hypobromeux	HBrO	8,7	BrO ⁻	ion hypobromite
	H ₂ PO ₄ ⁻	7,2	HPO ₄ ²⁻	
acide sulfhydrique	H ₂ S	7,0	HS ⁻	
	H ₂ CO ₃	6,4	HCO ₃ ⁻	
	CH ₃ COOH	4,7	CH ₃ COO ⁻	
	C ₆ H ₅ COOH	4,2	C ₆ H ₅ COO ⁻	ion benzoate
acide nitreux	HNO ₂	3,4	NO ₂ ⁻	ion nitrite
acide phosphorique	H ₃ PO ₄	2,1	H ₂ PO ₄ ⁻	
	HSO ₄ ⁻	1,9	SO ₄ ²⁻	
acide picrique	(NO ₂) ₃ C ₆ H ₂ OH	0,4	(NO ₂) ₃ C ₆ H ₂ O ⁻	ion picrate
ion hydronium	H ₃ O ⁺	0	H ₂ O	
EDTA	H ₄ Y	2,0	H ₃ Y ⁻	
	H ₃ Y ⁻	2,7	H ₂ Y ²⁻	
	H ₂ Y ²⁻	6,2	HY ³⁻	
	HY ³⁻	10,2	Y ⁴⁻	

IV Potentiels standard des couples rédox courants

Les potentiels (en V) sont mesurés à pH = 0 par rapport à l'E.S.H.

$\text{Ag}^+/\text{Ag}_{(s)}$	0,80	$\text{I}_{2(s)}/\text{I}^-$	0,53
$\text{Al}^{3+}/\text{Al}_{(s)}$	-1,66	$\text{K}^+/\text{K}_{(s)}$	-2,93
$\text{Ba}^{2+}/\text{Ba}_{(s)}$	-2,90	$\text{Li}^+/\text{Li}_{(s)}$	-3,03
$\text{Be}^{2+}/\text{Be}_{(s)}$	-1,85	$\text{Mg}^{2+}/\text{Mg}_{(s)}$	-2,37
$\text{Br}_{2(\ell)}/\text{Br}^-$	1,06	$\text{Mn}^{2+}/\text{Mn}_{(s)}$	-1,19
$\text{BrO}_3^-/\text{Br}_{2(\ell)}$	1,52	$\text{MnO}_4^-/\text{Mn}^{2+}$	1,51
$\text{Ca}^{2+}/\text{Ca}_{(s)}$	-2,87	$\text{MnO}_{2(s)}/\text{Mn}^{2+}$	1,23
$\text{Cd}^{2+}/\text{Cd}_{(s)}$	-0,40	$\text{HNO}_2/\text{NO}_{(g)}$	0,99
$\text{Cl}_{2(g)}/\text{Cl}^-$	1,40	$\text{NO}_3^-/\text{HNO}_2$	0,94
$\text{HClO}_2/\text{HClO}$	1,64	$\text{Na}^+/\text{Na}_{(s)}$	-2,70
$\text{HClO}/\text{Cl}_{2(g)}$	1,63	$\text{Ni}^{2+}/\text{Ni}_{(s)}$	-0,23
$\text{ClO}_4^-/\text{ClO}_3^-$	1,19	$\text{H}_2\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}$	1,77
$\text{Cr}^{3+}/\text{Cr}^{2+}$	-0,41	$\text{H}_3\text{PO}_4/\text{H}_3\text{PO}_3$	-0,28
$\text{Cr}_2\text{O}_7^{2-}/\text{Cr}^{3+}$	1,33	$\text{Pb}^{2+}/\text{Pb}_{(s)}$	-0,13
$\text{Cs}^+/\text{Cs}_{(s)}$	-2,95	$\text{PbSO}_{4(s)}/\text{Pb}_{(s)}$	-0,36
$\text{Cu}^+/\text{Cu}_{(s)}$	0,52	$\text{PbO}_{2(s)}/\text{Pb}^{2+}$	1,47
$\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}_{(s)}$	0,34	$\text{PbO}_{2(s)}/\text{PbSO}_{4(s)}$	1,69
$\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}_{(s)}$	-0,44	$\text{HSO}_4^-/\text{H}_2\text{S}_{(g)}$	0,32
$\text{Fe}^{3+}/\text{Fe}^{2+}$	0,77	$\text{HSO}_4^-/\text{SO}_{2(g)}$	0,14
$\text{H}^+/\text{H}_{2(g)}$	0,00	$\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$	0,09
$\text{Hg}_2^{2+}/\text{Hg}_{(\ell)}$	0,79	$\text{Sn}^{2+}/\text{Sn}_{(s)}$	-0,14
$\text{Hg}_2\text{Cl}_{2(s)}/\text{Hg}_{(\ell)}$	0,27	$\text{Sn}^{4+}/\text{Sn}^{2+}$	0,14
$\text{Hg}^{2+}/\text{Hg}_2^{2+}$	0,91	$\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}_{(s)}$	-0,76

Constantes physiques

Vitesse de la lumière	$c = 2,997\,924\,58 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$
Charge élémentaire	$e = 1,602\,19 \cdot 10^{-19} \text{ C}$
Nombre d'Avogadro	$\mathcal{N}_A = 6,022\,04 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
Constante gravitationnelle	$G = 6,672 \cdot 10^{-11} \text{ N.m}^2.\text{kg}^{-2}$
Constante des gaz parfaits	$R = 8,314\,4 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$
Constante de Faraday	$\mathcal{F} = 96\,484 \text{ C.mol}^{-1}$
Constante de Boltzmann	$k_B = 1,380\,66 \cdot 10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$
Constante de Planck	$h = 6,626\,17 \cdot 10^{-34} \text{ J.s}$
Masse de l'électron	$m_e = 9,109\,53 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$
Masse du neutron	$m_n = 1,675 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Masse du proton	$m_p = 1,673 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$
Permittivité du vide	$\varepsilon_0 = 8,854\,19 \cdot 10^{-12} \text{ F.m}^{-1}$
Perméabilité du vide	$\mu_0 = 4 \pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$
<hr/>	
Masse du Soleil	$1,989\,1 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
Masse de la Terre	$5,973\,6 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
Masse de la Lune	$7,34 \cdot 10^{22} \text{ kg}$
Rayon du Soleil	696 000 km
Rayon de la Terre (équateur)	6 378,14 km
Rayon de la Lune (équateur)	1 737 km
Distance Soleil-Terre (demi grand axe)	149 597 870 km
Distance Terre-Lune (demi grand axe)	384 400 km

Formulaire d'analyse vectorielle

I Les systèmes de coordonnées

1 Élément de volume

Coordonnées	$d\tau$
cartésiennes	$dx \times dy \times dz$
cylindriques	$dr \times r d\theta \times dz$
sphériques	$dr \times r d\theta \times r \sin \theta d\varphi$

2 Dérivation des vecteurs de la base

- En coordonnées cartésiennes, les vecteurs de base sont constants : leurs dérivées par rapport à t sont nulles.
- En coordonnées cylindriques :

$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = -\dot{\theta} \vec{u}_r \quad \frac{d\vec{u}_z}{dt} = \vec{0}$$

- En coordonnées sphériques, la dérivation n'est pas utilisée car les dérivées ne sont pas simples.

II Expressions des différentielles

Coordonnées	dF
cartésiennes	$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) dx + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right) dy + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) dz$
cylindriques	$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right) dz$
sphériques	$\left(\frac{\partial F}{\partial r}\right) dr + \left(\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) d\varphi$

III Expressions des opérateurs

1 Le gradient

Coordonnées	$\vec{\text{grad}} f$
cartésiennes	$\frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
cylindriques	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{e}_z$
sphériques	$\frac{\partial f}{\partial r} \vec{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \varphi} \vec{e}_\varphi$

2 La divergence

Coordonnées	$\operatorname{div} \vec{F}$		
cartésiennes	$\frac{\partial F_x}{\partial x}$	+	$\frac{\partial F_y}{\partial y}$ + $\frac{\partial F_z}{\partial z}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial(rF_r)}{\partial r}$	+	$\frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$ + $\frac{\partial F_z}{\partial z}$
sphériques	$\frac{1}{r^2} \frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r}$	+	$\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial(F_\theta \sin \theta)}{\partial \theta}$ + $\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi}$

3 Le rotationnel

Coordonnées	$\operatorname{rot} \vec{F}$
cartésiennes	$\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right) \vec{e}_x + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right) \vec{e}_y + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) \vec{e}_z$
cylindriques	$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial z}\right) \vec{e}_r + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_z$
sphériques	$\frac{1}{r^2 \sin \theta} \left(\frac{\partial(F_\varphi r \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial(rF_\theta)}{\partial \varphi}\right) \vec{e}_r$ $+ \frac{1}{r \sin \theta} \left(\frac{\partial F_r}{\partial \varphi} - \frac{\partial(F_\varphi r \sin \theta)}{\partial r}\right) \vec{e}_\theta$ $+ \frac{1}{r} \left(\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right) \vec{e}_\varphi$

4 Le laplacien

Coordonnées	Δf
cartésiennes	$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
cylindriques	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
sphériques	$\frac{1}{r} \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rf) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \times \frac{\partial f}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$

5 Le laplacien vectoriel

Le laplacien vectoriel est défini par la relation :

$$\Delta \vec{F} = \overrightarrow{\operatorname{grad}}(\operatorname{div} \vec{F}) - \overrightarrow{\operatorname{rot}}(\operatorname{rot} \vec{F})$$

Il ne s'exprime simplement qu'en coordonnées cartésiennes :

$$\Delta \vec{F}(x, y, z, t) = \Delta F_x \vec{e}_x + \Delta F_y \vec{e}_y + \Delta F_z \vec{e}_z$$

IV Relations entre les opérateurs

Relations de compositions entre opérateurs :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{F}) = 0$$

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} f) = \Delta f$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{grad} f) = \vec{0}$$

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{F}) - \Delta \vec{F}$$

Relations de composition entre arguments :

$$\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$$

$$\operatorname{div}(f \vec{F}) = f \operatorname{div} \vec{F} + \vec{F} \cdot \operatorname{grad} f$$

$$\operatorname{rot}(f \vec{F}) = f \operatorname{rot} \vec{F} + (\operatorname{grad} f) \wedge \vec{F}$$

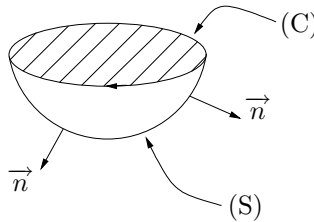
$$\operatorname{div}(\vec{F} \wedge \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot} \vec{F} - \vec{F} \cdot \operatorname{rot} \vec{G}$$

V Les théorèmes d'analyse

1 Le théorème de Stokes

Ce théorème permet de ramener le calcul d'une circulation le long d'un contour fermé à une intégration sur une surface, ce qui peut être plus simple (par exemple en choisissant pour surface une demi-sphère).

On considère un contour fermé (C) sur lequel on choisit un sens de parcours arbitraire. On note (S) une surface s'appuyant sur (C). En un point de (S), on oriente le vecteur normal unitaire \vec{n} selon la règle du tire-bouchon :

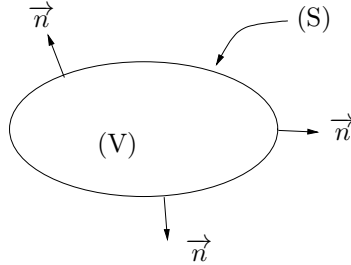


En notant $\oint_{(C)} \vec{f} \cdot d\vec{\ell}$ la circulation de \vec{f} sur le contour (C), le théorème de Stokes donne :

$$\oint_{(C)} \vec{f} \cdot d\vec{\ell} = \iint_{(S)} \operatorname{rot} \vec{f} \cdot d\vec{S}$$

2 Le théorème de Green-Ostrogradski

Ce théorème permet de ramener un calcul sur une surface à un calcul sur un volume. On considère une surface fermée (S) limitant un volume (V). Par convention, le vecteur unitaire \vec{n} normal à (S) est choisi *sortant*.



En notant $\oiint_{(S)} \vec{F} \cdot \vec{dS}$ le flux de \vec{F} sortant de la surface fermée (S), le théorème de Green-Ostrogradski donne :

$$\oiint_{(S)} \vec{F} \cdot \vec{dS} = \iiint_{(V)} \operatorname{div} \vec{F} \, dV$$

3 Les corollaires

Les notations sont les mêmes que précédemment.

$$\text{Formule de Kelvin} \quad \oint_{(C)} f \, \vec{d\ell} = - \iint_{(S)} \overrightarrow{\operatorname{grad} f} \wedge \vec{dS}$$

$$\text{Formule du gradient} \quad \oiint_{(S)} f \, \vec{dS} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{\operatorname{grad} f} \, dV$$

$$\text{Formule du rotationnel} \quad \oiint_{(S)} \vec{dS} \wedge \vec{F} = \iiint_{(V)} \overrightarrow{\operatorname{rot} F} \, dV$$

